Correction de l'exercice 8, feuille VI.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et (E_n) une suite d'événements indépendants. Montrer que la probabilité que ω appartiennent à une infinité de E_n est soit 0, soit 1.
Indication : étudier le cas où la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(E_n)$ converge, puis le cas où cette somme diverge. Dans le premier cas, utiliser le dernier exercice de la feuille précédente. Dans le second cas, considérer la suite (E_n^c) et montrer que pour tout $N \geq 0$, on a $p(\bigcap_{n\geq N} E_n^c) \leq \prod_{n\geq N} \exp(-p(E_n))$ en utilisant l'inégalité $1 - x \leq \exp(-x)$.

Correction 8. Dans le dernier exercice de la feuille précédente, on a vu que l'ensemble E formé par les ω appartenant à une infinité de E_n est égal à $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} E_n$, et que si $\sum p(E_n) < +\infty$ alors $p(E) = 0$, et ceci n'utilise pas que les (E_n) sont indépendants : l'argument dans ce cas est simplement basé sur le fait que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a par définition $p(E) \leq \sum_{n\geq N} p(E_n)$; comme $\sum p(E_n) < +\infty$, la suite des restes $\sum_{n\geq N} p(E_n)$ tend vers 0. Par conséquent, $p(E)$ est plus petit que tous les termes d'une suite tendant vers 0, d'où $p(E) = 0$.
Traitons maintenant le cas où $\sum p(E_n) = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p(E_n^c) = 1 - p(E_n)$, qui est inférieur à $\exp(-p(E_n))$ d'après l'inégalité fournie par l'énoncé (qui n'est elle-même pas difficile à vérifier : une étude de fonction, voire un dessin, suffit). Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $M \geq N$, on a

$$\begin{aligned} p(\bigcap_{n=N}^{M} E_n^c) &= \prod_{n=N}^{M} p(E_n^c) \\ &= \prod_{n=N}^{M} (1 - p(E_n)) \\ &\leq \prod_{n=N}^{M} \exp(-p(E_n)) \\ &= \exp(-\sum_{n=N}^{M} p(E_n)) \end{aligned}$$

Notons que, dans l'argument ci-dessus, la première ligne utilise que les E_n sont indépendants. Bien sûr, on a aussi pour tout M que $\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c \subseteq \bigcap_{n=N}^{M} E_n^c$, donc aussi

$$p(\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c) \leq p(\bigcap_{n=N}^{M} E_n^c) \leq \exp(-\sum_{n=N}^{M} p(E_n)) \ .$$

Comme on a $\sum_{n=N}^{+\infty} p(E_n) = +\infty$ pour tout N, on obtient en faisant tendre M vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente que, pour tout N, $p(\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c) = 0$. Par définition de E, on a

$$E^c = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} E_n^c \ ,$$

donc E^c est la réunion d'une suite d'ensembles de mesure nulle, et est donc lui-même de mesure nulle. Par conséquent $p(E) = 1$ dans ce cas.