Feuille d'exercices II.

Intégrales à paramètres

Exercice 1. Soit $a < -1$. Calculer $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+at}$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{tdt}{(1+at)^2}$.

Exercice 2. Pour $x \geq 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x/t}\,dt$.

Montrer que φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour $x > 0$.

Exercice 3. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$.

1. (a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)\,dt$ puis de $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,dt$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 5. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 6. On pose pour $x \geq 0$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$. Montrer que la fonction f est bien définie et dérivable sur $[0,+\infty[$.
Calculer explicitement f' et en déduire f (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

Exercice 7. 1. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}\,dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout réel x $\left(\text{on admet que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.
4. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t^2}\,dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.