Contrôle 2, 4 novembre 2015, 2H.

Notes de cours et appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1. Énoncer le théorème de convergence monotone.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2}\, dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et que f est continue sur ce domaine (on pourra commencer par montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$).
2. (a) Montrer que
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^4}.$$
   (b) En déduire que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge.
3. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)(1+t)}$ et calculer cette intégrale.

Exercice 3. Calculer l'aire de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x < 4y,\ 1 < xy < 5\}$ en utilisant le changement de variables $u = \dfrac{x}{y}$, $v = xy$.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{e^t + e^{-t}}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F, c'est-à-dire l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} \colon F(x) < +\infty\}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $]0,1[$ strictement croissante qui converge vers 1. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{x_n t}}{e^t + e^{-t}}\, dt\right)_{n\geq 0}$ a pour limite $+\infty$.
4. En déduire les limites de F en 1 et -1.
5. Montrer que F est C^1 sur $]-1,1[$ et donner une expression de F' sous forme intégrale.
6. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que F est C^n sur $]-1,1[$ et donner une expression de $F^{(n)}$ sous forme intégrale.