Correction du Contrôle 1 du 16 octobre 2015.

Pour faciliter la lecture, l'énoncé apparaît en italiques ci-dessous.

Exercice 1. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2}\,dt$.*

1. *Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et que f est continue sur ce domaine (on pourra commencer par montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$).*

   Pour $x = 0$, on est confronté à l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2 t^2}$. Cette fonction est à valeurs positives, et est équivalente en 0^+ à $\dfrac{1}{t^2}$. Le critère de Riemann nous permet de conclure que f n'est pas définie en 0.

   Montrons maintenant que f est définie et continue sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$. Sur un tel intervalle, on a $(x^2+t)^2 \geq a^4$, et donc $\dfrac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2} \leq \dfrac{1}{(1+t)^2 a^4}$. La fonction à droite dans cette majoration est intégrable et ne dépend pas de x ; comme $x \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2}$ est continue sur cet intervalle pour tout $t \in [0, +\infty[$, on conclut à l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètres que f est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est en fait continue sur $]0, +\infty[$. Finalement, comme f est paire, on obtient immédiatement qu'elle est bien définie et continue sur $]-\infty, 0[$.

2. (a) *Montrer que, pour tout $t > 0$ fixé, $\dfrac{x^4}{(x^2+t)^2}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.*

   C'est immédiat : $\dfrac{x^4}{(x^2+t)^2} = \dfrac{1}{(1+\frac{t}{x^2})^2}$ et pour tout $t > 0$ fixé $\dfrac{t}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

   (b) *Montrer que $x^4 f(x)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.*

   On a vu que, pour t fixé, $\dfrac{x^4}{(1+t^2)(x^2+t)^2}$ tend vers $\dfrac{1}{1+t^2}$ quand $x \to +\infty$; puisque $x^4 f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+t^2)(x^2+t)^2}dt$, on pourra échanger limite et intégrale et affirmer que $x^4 f(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ dès qu'on aura vérifié les hypothèses du théorème utilisé :

   — Si on veut appliquer le théorème de convergence monotone, on remarque que $\dfrac{x^4}{(1+t^2)(x^2+t)^2} \geq 0$ pour tout x, t et que, à t fixé, $\dfrac{x^4}{(1+t^2)(x^2+t)^2} = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+\frac{t}{x^2})^2}$ est croissante vers $\dfrac{1}{1+t^2}$ quand x croît vers $+\infty$ (mais il faut justifier la monotonie, qui n'est pas immédiate à voir si on ne factorise pas le numérateur et le dénominateur !). Les hypothèses du théorème de convergence monotone sont donc bien réunies et on peut conclure.

   — Si on veut appliquer le théorème de convergence dominée, il nous faut trouver une fonction de majoration intégrable et indépendante de x ; c'est ce qu'on a fait à la question précédente pour montrer la continuité de f ! Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{x^4}{(1+t^2)(x^2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$; la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ étant intégrable et indépendante de x, les hypothèses du théorème de convergence dominée sont également réunies et on peut conclure.

(c) *Montrer que* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x)\, dx$ *converge.*

Le résultat de la question précédente nous dit que $x^4 f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2}$; donc $x f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2x^3}$. Le critère de Riemann et le fait que f est à valeurs positives nous permettent donc de conclure que l'intégrale est convergente en $+\infty$. En 1 f est continue, donc $x \mapsto x f(x)$ aussi, et il n'y a pas de problème de convergence. Par conséquent I est convergente.

3. *Montrer que* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)(1+t)}$ *et calculer cette intégrale.*

La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2}$ étant continue et à valeurs positives sur $]1,+\infty[\times]0,+\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de Fubini-Tonelli, et écrire :

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{+\infty} x \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2}\, dt \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+t)^2}\, dx \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+t} \right]_1^{+\infty} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)(1+t)} \, .
\end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on doit d'abord décomposer $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t)}$ en éléments simples : la décomposition est de la forme $\dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b+ct}{1+t^2}$. En multipliant par $1+t$ en en évaluant en $t=-1$, on obtient $a = \dfrac{1}{2}$; en multipliant par $1+t^2$ et en évaluant en $t=i$ on obtient $b+ic = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$, ce dont on déduit que $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{2}$. Finalement, nous avons donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt \\
&= \frac{1}{4} \lim_{M \to +\infty} \left[\ln(1+t) + \arctan(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^M \\
&= \frac{1}{4} \lim_{M \to +\infty} \ln\left(\frac{1+M}{\sqrt{1+M^2}} \right) + \arctan(M) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{8} \, .
\end{aligned}$$

Ici, il fallait d'abord faire attention au calcul de la décomposition en éléments simples (on décompose sur $\mathbb{R}$, il ne peut pas y avoir de coefficients complexes non réels !), puis dans le calcul de l'intégrale ne pas faire apparaître une différence de deux intégrales divergentes (quand on rencontre ce genre de problème, on calcule d'abord sur $[0, M]$ puis on fait tendre M vers $+\infty$, comme on a fait ci-dessus ; notons qu'on avait déjà établi que I est convergente et on savait donc avant de faire le calcul que la limite existait).