

# Cours d'Analyse I : les réels et les fonctions

Lorenzo Brandolese

Université Lyon 1  
Institut Camille Jordan – CNRS UMR 5208 FRANCE

Automne 2015 - Licence L1

## 1 Introduction à $\mathbb{R}$

### 1.1 Notations de base

1.2 Définition de  $\mathbb{R}$  via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de  $\mathbb{Q}$ , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

## 1 Introduction à $\mathbb{R}$

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^*$ , etc.
- $\forall, \exists$ , etc.
- $\in, \subset$ , etc.
- $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ , etc.

[Détails au tableau]

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

1.1 Notations de base

1.2 Définition de  $\mathbb{R}$  via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de  $\mathbb{Q}$ , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

## Définition (L'ensemble des nombres réels)

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ m, \alpha_1 \alpha_2 \dots \mid m \in \mathbb{Z}, \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}, \right.$$

avec les  $\alpha_j$  pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang  $\left. \right\}$ .

- Pour simplifier les notations on écrit, par exemple

$$4, 23 \stackrel{\text{déf}}{=} 4, 23000 \dots \in \mathbb{R}.$$

- Même si la définition précédente exclut a priori des nombres tels que  $5, 32999 \dots$ , on décide de donner un sens à ces nombres en imposant, par exemple,  $5, 32999 \dots = 5, 33$ , ou encore  $0, 999 \dots = 1$ .

## Définition (L'ensemble des nombres rationnels)

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

L'inclusion  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  repose sur des faits bien connus :

- Toute fraction  $\frac{p}{q}$  (avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ ) s'écrit bien sous la forme

$$\frac{p}{q} = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$

L'algorithme de la division permet de calculer, l'un après l'autre, l'entier  $m \in \mathbb{Z}$  et les chiffres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

- Après un certain rang, un groupe de chiffres se repète indéfiniment (le développement d'un nombre rationnel est **périodique**).
- Ce développement ne se termine jamais par 999...
- Réciproquement, on peut toujours convertir un nombre ayant un développement décimal périodique sous la forme de fraction.

[Explications supplémentaires au tableau]

## Exemple

$$\frac{9}{7} = 1, \underline{285714} 285714 \dots = 1, \underline{285714}$$

$$\frac{9}{70} = 0, 1 \underline{285714} 285714, \dots = 0, 1 \underline{285714}$$

Les groupe de chiffres souligné (ou "période") se repète indéfiniment.

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

1.1 Notations de base

1.2 Définition de  $\mathbb{R}$  via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de  $\mathbb{Q}$ , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

## Définition

Une **relation d'ordre** sur un ensemble  $X$  est une relation  $\leq$  vérifiant les trois conditions suivantes :

(o1)  $\forall x \in X, x \leq x$ .

(o2)  $\forall x, y \in X$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $x = y$ .

(o3)  $\forall x, y, z \in X$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$ .

Un ensemble  $X$ , muni d'une relation d'ordre  $\leq$ , est dit **totale-ment ordonné** lorsqu'on a aussi

(o4)  $\forall x, y \in X$  on a  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ .

En supposant connue la relation d'ordre usuelle  $\leq$  dans  $\mathbb{Z}$ , on **définit** facilement une relation d'ordre (compatible)  $\leq$  dans  $\mathbb{R}$ .

[Détails au tableau]

**Conclusion :**

$(\mathbb{R}, \leq)$  est un ensemble totale-ment ordonné.

Lorenzo Brandolese

## Définition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $A$  est **borné supérieurement** s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall a \in A, a \leq M.$$

On dit alors que  $M$  est un **majorant** pour  $A$ . Si de plus  $M \in A$  on dit que  $M$  est le **maximum** de  $A$  (ou "le plus grand élément de  $A$ ") :

$$M = \max(A).$$

- Lorsqu'il existe, le maximum est unique [pourquoi ?].

## Définition

On dit que  $A$  est **borné inférieurement** s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall a \in A, m \leq a.$$

On dit alors que  $m$  est un **minorant** pour  $A$ . Si de plus  $m \in A$  on dit que  $m$  est le **minimum** de  $A$  (ou "le plus petit élément de  $A$ ") :

$$m = \min(A).$$

Lorenzo Brandolese

## Définition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  borné supérieurement. Supposons que l'ensemble de tous les majorants de  $A$  possède un minimum  $S \in \mathbb{R}$ . Ce nombre  $S$  s'appelle la **borne sup** de  $A$  :

$$S = \sup(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majorant de } A\}.$$

Si l'ensemble  $A$  possède un maximum :  $\sup(A) = \max(A)$ .

## Définition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  borné inférieurement. Supposons que l'ensemble de tous les minorants de  $A$  possède un maximum  $I \in \mathbb{R}$ . Ce nombre  $I$  s'appelle la **borne inf** de  $A$  :

$$I = \inf(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minorant de } A\}.$$

Noter que  $\sup(A)$  et  $\inf(A)$ , s'ils existent, sont uniques.

Lorenzo Brandolese

## Théorème (admis)

*Tout ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans  $\mathbb{R}$ . Tout ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  non vide et borné inférieurement possède une borne inf dans  $\mathbb{R}$ .*

## Conventions :

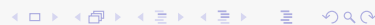
On écrit  $\sup A = +\infty$  lorsque  $A \neq \emptyset$  n'est pas borné supérieurement. Parfois on pose  $\sup \emptyset = -\infty$  et  $\inf \emptyset = +\infty$ .

Lorenzo Brandolese

## Question

Vrai ou faux ?

- 1 Tout ensemble  $A \subset \mathbb{Z}$  non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans  $\mathbb{Z}$ .
- 2 Tout ensemble  $A \subset \mathbb{Q}$  non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans  $\mathbb{Q}$ .
- 3 Tout ensemble  $A \subset \mathbb{Q}$  non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans  $\mathbb{R}$ .



Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

- 1.1 Notations de base
- 1.2 Définition de  $\mathbb{R}$  via l'écriture décimale
- 1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf
- 1.4 Règles de calculs
- 1.5 Propriétés d'Archimède, densité de  $\mathbb{Q}$ , racines
- 1.6 Valeur absolue et partie entière

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles



Lorenzo Brandolese

## Règle pratique pour le calcul de sup et inf

## Proposition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  un ensemble borné supérieurement et  $S \in \mathbb{R}$ .  
On a

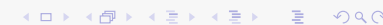
$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & a \leq S \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ tel que } S - \epsilon < a. \end{cases}$$

Dém. Au tableau.

## Proposition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  un ensemble borné inférieurement et  $I \in \mathbb{R}$ .  
On a

$$I = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & I \leq a \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ tel que } a < I + \epsilon. \end{cases}$$



Lorenzo Brandolese

## Somme et produit de nombres réels.

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , la définition rigoureuse de

$$x + y \quad \text{et} \quad x \cdot y$$

à partir de leur écriture décimale nécessite l'utilisation de la propriété du sup. Par exemple (dans le cas de nombres réels positifs, pour simplifier) :

Si  $x = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$  et  $y = n, \beta_1 \beta_2 \dots$ , on pose

$$x + y \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \{x_k + y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}, \quad x \cdot y \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \{x_k \cdot y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\},$$

où  $x_k$  et  $y_k$  sont les nombres rationnels (que l'on sait déjà sommer ou multiplier entre eux)  $x_k = m, \alpha_1 \dots \alpha_k$  et  $y_k = n, \beta_1 \dots \beta_k$

Ces opérations ont les propriétés usuelles (commutative, associative, etc.), justifiant les règles usuelles de calcul.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\mathbb{R}$ , muni des opérations  $+$  et  $\cdot$  et de la relation d'ordre  $\leq$ , a la structure de **corp commutatif totalement ordonné**.

[Détails au tableau].



Lorenzo Brandolese

## Question

- 1  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  est-il un **corp commutatif totalement ordonné** ?
- 2 Et  $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$  ?
- 3 Et  $\mathbb{C}$  (nombres complexes) ?

- 1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 
  - 1.1 Notations de base
  - 1.2 Définition de  $\mathbb{R}$  via l'écriture décimale
  - 1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf
  - 1.4 Règles de calculs
  - 1.5 Propriétés d'Archimède, densité de  $\mathbb{Q}$ , racines
  - 1.6 Valeur absolue et partie entière
- 2 Suites numériques
- 3 Fonctions, Limites, continuité
- 4 Dérivées
- 5 Équations différentielles

Théorème ( $\mathbb{R}$  est archimédien)

Pour tout  $x > 0$ , et tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } nx > y.$$

**Dém.** On peut se ramener au cas  $x = 1$  [pourquoi?]. Ensuite, si  $y < 0$  il suffit de prendre  $n = 0$ . Si  $y = 0$  il suffit de prendre  $n = 1$ . Si  $y > 0$  est de la forme  $y = m, \alpha_0 \alpha_1 \dots$ , il suffit de prendre  $n = m + 1$ .  $\square$

Théorème (densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ )

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ , avec  $x < y$ ,

$$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x < q < y.$$

**Dém.** [Au tableau].

## Théorème (existence des racines)

Pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une unique solution  $x \in \mathbb{R}^+$  de l'équation.

$$x^n = a.$$

Cette solution est notée  $x = \sqrt[n]{a}$  ou sinon  $x = a^{1/n}$ .

**Dém.** [Admise : voir les approfondissements].

- Le théorème ci-dessus **ne permet pas** de définir  $\sqrt{-7}$ , ou  $\sqrt[4]{-3}$ , ou encore  $(-\pi)^{1/2}$  (écritures à proscrire).

## Définition

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier **impair** et  $a \in \mathbb{R}^+$ . On pose

$$\sqrt[n]{-a} = (-a)^{1/n} \stackrel{\text{déf}}{=} -\sqrt[n]{a}.$$

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

- 1.1 Notations de base
- 1.2 Définition de  $\mathbb{R}$  via l'écriture décimale
- 1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf
- 1.4 Règles de calculs
- 1.5 Propriétés d'Archimède, densité de  $\mathbb{Q}$ , racines
- 1.6 Valeur absolue et partie entière

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

## Définition (Valeur absolue)

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$|x| \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| \geq 0$  et aussi  $|x| \geq \pm x$ .
- Si  $M \in \mathbb{R}^+$ , on a :  $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$ .
- Si  $M \in \mathbb{R}^+$ , on a :  $|x| \geq M \iff x \leq -M$  ou  $x \geq M$ .
- $|x - a|$  exprime la **distance** entre les réels  $x$  et  $a$ .

## Proposition

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{“inégalité triangulaire”,}$$

et

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Dém. [Au tableau].

## Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de  $y = f(x)$  ?

## Définition (parties positives et négatives)

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$x^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, 0).$$

## Propriétés

- $x^+ + x^- = \dots$  ??
- $x^+ - x^- = \dots$  ??

## Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de  $y = f(x)$  ?

## Définition (parties positives et négatives)

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$x^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, 0).$$

## Propriétés

- $x^+ + x^- = |x|$
- $x^+ - x^- = x$

## Définition (Partie entière)

Soit  $x = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$  un nombre réel. La partie entière de  $x$  (notée  $[x]$  ou  $E(x)$ ) est définie par

$$[x] \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} m & \text{si } x \geq 0 \\ m - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Autrement dit,  $[x]$  est le **plus grand entier**  $\leq x$ .

**Propriétés :** pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

- $[x] \in \mathbb{Z}$ .
- Pour tout réel  $x$  :  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

[Au tableau : graphe de  $[x]$ ,  $|x|$ ,  $x^+$  et  $x^-$ ].

Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre  $e$
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$
- 2.9 Suites complexes

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

Lorenzo Brandolese

**Problème :** on souhaite démontrer qu'une certaine propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Principe des démonstrations par récurrence :**

- Si  $\mathcal{P}_0$  est vraie, [initialisation]
- et si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ , [hérédité]

Alors la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

## Question

Comment calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la somme de  $n$  premiers nombres impairs,

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) ?$$

Lorenzo Brandolese

## Définition (Factoriels et puissances)

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$0! \stackrel{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \stackrel{\text{déf}}{=} (n-1)! \cdot n$$

- Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

$$a^0 \stackrel{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \stackrel{\text{déf}}{=} a \cdot a^{n-1}.$$

Ceci donne, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

et

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}}$$

Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre  $e$ 

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$ 

2.9 Suites complexes

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

## Définition (Coefficient binomial)

Soit  $n, k \in \mathbb{N}$ . On pose

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Propriétés [Exercice]

- En particulier,  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = n$ ,  $\binom{n}{n} = 1$ .
- Pour  $n, k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

## Théorème (formule du binôme)

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dém. [Au tableau].

## Corollaire (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Dém. [Au tableau].

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre  $e$ 

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$ 

2.9 Suites complexes

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles



## Définition (suite)

Une **suite réelle** est une application

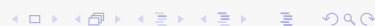
$$\begin{aligned} x: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Notations alternatives pour les suites :**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou simplement  $(x_n)$ .

On appelle aussi "suite réelle" les applications à valeur réelles dont l'ensemble de départ est  $\mathbb{N}$  privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.

Voici trois manières différentes de noter la même suite :

- La fonction  $x: \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x(n) = n^2$ .
- La suite  $(n^2)_{n \geq 4}$ .
- La suite  $(16, 25, 36, \dots)$ .



Lorenzo Brandolese

## Définition (limite d'une suite)

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que la suite  $(x_n)$  **converge** si et seulement s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  (appelé **limite de la suite**), tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq N \text{ on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ , ou  $x_n \rightarrow \ell$ .

Une suite **non convergente** est dite **divergente**.

Certaines suites divergentes peuvent avoir une limite infinie :

## Définition (limite infinie)

On dit que la suite  $(x_n)$  **diverge à l'infini** si :

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq N, |x_n| \geq M.$$

On écrit dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , ou  $x_n \rightarrow \infty$ .



Lorenzo Brandolese

## Question

Comment donner un sens aux écritures

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty ?$$

## Exercice

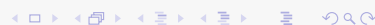
En utilisant le fait que  $\mathbb{R}$  est archimédien, démontrer rigoureusement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

## Théorème (Unicité de la limite)

*Si la limite  $\ell$  d'une suite réelle existe (finie ou infinie), elle est unique.*

**Dém.** [Au tableau]



Lorenzo Brandolese

**Terminologie :** une suite réelle  $(x_n)$  est dite

- **majorée**, si :  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $x_n \leq M$ .
- **bornée**, si :  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $|x_n| \leq M$ .
- **croissante**, si :  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $x_n \leq x_{n+1}$ .

**Ne jamais intervertir  $\exists \dots$  et  $\forall \dots$ . Par exemple,**

$$“\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } x_n \leq M”$$

*n'est pas la même chose que*

$$“\forall n \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que on a } x_n \leq M”$$

## Proposition

*Toute suite réelle convergente est bornée.*

## Question

- 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \xrightarrow{?} (x_n)$  non bornée.
- 2  $(x_n)$  non bornée  $\xrightarrow{?} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .



Lorenzo Brandolese

## Théorème (des gendarmes)

Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(x_n)$  trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

et

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$$

(avec  $\ell \in \mathbb{R}$ , ou  $\ell = +\infty$  ou  $\ell = -\infty$ ).

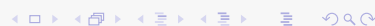
Alors la suite  $(x_n)$  **possède une limite** et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

**Dém.** Au tableau.

## Question

La suite  $x_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$  est-elle convergente ?



Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre  $e$

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$

2.9 Suites complexes

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles



Lorenzo Brandolese

## Théorème (opération avec les limites)

Soient  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites réelles **convergentes** respectivement vers  $\ell$  et  $\ell'$ . Alors les suites  $(x_n + y_n)$  et  $(x_n y_n)$  sont convergentes et

$$x_n + y_n \rightarrow \ell + \ell', \quad \text{et} \quad x_n y_n \rightarrow \ell \ell'.$$

De plus, si  $y_n \neq 0$  pour tout  $n$  :

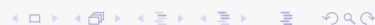
- $\ell' \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$

- $\ell \neq 0, \ell' = 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

## Question

Comment calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6} \quad ?$$



Lorenzo Brandolese

## Sur la démonstration du théorème précédent

## Question (autour de la définition de limite)

Soit  $(x_n)$  une suite et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Comparer les trois écritures suivantes :

1

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

2

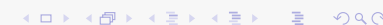
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < 2\epsilon.$$

3

$$\exists C > 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < C\epsilon.$$

Sont-elles équivalentes ?

[Dém. du théorème au tableau]



Lorenzo Brandolese

### Théorème (opérations avec des limites infinies)

Soient  $x_n \rightarrow l$  et  $y_n \rightarrow l'$ .

- Si  $l \in \mathbb{R}$  et  $l' = +\infty$ , alors  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ .
- Si  $l > 0$  et  $l' = +\infty$ , alors  $x_n y_n \rightarrow +\infty$
- Si  $l < 0$  et  $l' = \infty$ , alors  $x_n y_n \rightarrow -\infty$
- Si  $l \in \mathbb{R}$  et  $l' = \infty$ , alors  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
- Si  $l = l' = +\infty$ , alors  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$  et  $x_n y_n \rightarrow +\infty$ .

Tous les cas ne sont pas couverts ! Par exemple :

- $x_n \rightarrow 0$  et  $y_n \rightarrow \infty \implies x_n y_n \rightarrow ??$   $[0 \cdot \infty]$
- $x_n \rightarrow +\infty$  et  $y_n \rightarrow -\infty \implies x_n + y_n \rightarrow ??$   $[\infty - \infty]$
- $x_n \rightarrow +\infty$  et  $y_n \rightarrow +\infty \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow ??$   $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $x_n \rightarrow 0$  et  $y_n \rightarrow 0 \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow ??$   $[\frac{0}{0}]$

Ces cas de figure sont des exemples de **formes indéterminées**.

### Utilisation des limites pour le calculs de sup et inf.

#### Proposition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  non vide.

- $\sup(A) = +\infty$  si et seulement s'il existe  $(a_n) \subset A$  telle que  $a_n \rightarrow +\infty$ .
- $\sup(A) = S \in \mathbb{R}$  si et seulement s'il existe  $(a_n) \subset A$  telle que  $a_n \rightarrow S$  et  $S$  est un majorant pour  $A$ .

#### Proposition

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  non vide.

- $\inf(A) = -\infty$  si et seulement s'il existe  $(a_n) \subset A$  telle que  $a_n \rightarrow -\infty$ .
- $\inf(A) = l \in \mathbb{R}$  si et seulement s'il existe  $(a_n) \subset A$  telle que  $a_n \rightarrow l$  et  $l$  est un minorant pour  $A$ .

Dém. [Au tableau]

## 1 Introduction à $\mathbb{R}$

## 2 Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernouilli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre  $e$
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$
- 2.9 Suites complexes

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

Les suites **monotones** sont les suites réelles croissantes ou décroissantes.

### Théorème (limites des suites monotones)

Toute suite monotone  $(x_n)$  possède une limite. Plus précisément :

- Si  $(x_n)$  est croissante et majorée alors  $(x_n)$  **converge vers**  $S = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ .
- Si  $(x_n)$  est croissante et non majorée alors  $(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .
- Si  $(x_n)$  est décroissante et minorée alors  $(x_n)$  **converge vers**  $l = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ .
- Si  $(x_n)$  est décroissante et non minorée alors  $(x_n)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

Dém. [Au tableau].

**Proposition (suites adjacentes)**

Soit  $(x_n)$  une suite croissante et  $(y_n)$  une suite décroissante, telles que  $x_n \leq y_n$  et  $y_n - x_n \rightarrow 0$ . Alors  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergent vers la même limite.

**Dém.** [Au tableau.]

**Exercice**

Soient  $a, b$  deux réels, avec  $a < b$ . Posons

$$x_0 = \sqrt{ab}, \quad y_0 = \frac{a+b}{2}$$

et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Démontrer que ces suites sont adjacentes. Ces suites sont alors convergentes [mais on ne sais pas en expliciter la limite !]



Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

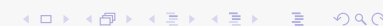
## 2 Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre  $e$
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$
- 2.9 Suites complexes

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles



Lorenzo Brandolese

**Définition (suite géométrique)**

Une suite de la forme  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $a \in \mathbb{R}$  est dite **géométrique**.

Pour  $a = 1$ , on obtient la suite constante  $(1, 1, \dots)$ .

Pour  $a = -1$ , la suite alternée divergente  $(1, -1, 1, -1, \dots)$ .

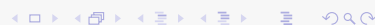
**Question**

Que peut-on dire de  $a^n$  pour  $n \rightarrow \infty$  dans les autres cas ?

**Théorème**

- $a > 1 \implies a^n \rightarrow +\infty$ .
- $-1 < a < 1 \implies a^n \rightarrow 0$ .
- $a < -1 \implies a^n \rightarrow \infty$ .

**Dém.** [Au tableau.]



Lorenzo Brandolese

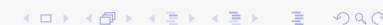
**Sommes partielles d'une suites géométrique**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

[Détails au tableau]

**Exercice (série géométrique)**

En fonction du paramètre  $a \in \mathbb{R}$ , étudier la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=0}^n a^k)$



Lorenzo Brandolese

## Un critère de convergence vers 0

### Lemme

Soit  $x_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 1}{x_n} = \ell, \quad \text{avec } \ell < 1,$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Dém. [Au tableau].

## Application. Deux théorèmes de comparaison

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 1 \\ 0, & \text{si } -1 < a < 1 \\ \infty, & \text{si } a < -1. \end{cases}$$

Noter que la valeur de  $p$  n'affecte pas ces limites.

Le cas  $a = \pm 1$  se traite facilement.

[Détails au tableau].

## Le nombre $e$

Nous définirons plus tard  $e \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(1)$ , après avoir introduit la fonction  $\ln$  et la fonction  $\exp$ .

Signalons ici deux caractérisations remarquables de ce nombre réel  $e$  :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

et

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

- La deuxième formule permet de démontrer que  $e$  est **irrationnel** et que  $e \simeq 2,718\dots$
- La première formule met en évidence qu'il y a une autre "forme indéterminée" (notée  $[1^\infty]$ ) :

$$x_n \rightarrow 1, \quad \text{et } y_n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \rightarrow ??$$

[Voir les TD et les approfondissements pour plus de détails.]

### 1 Introduction à $\mathbb{R}$

### 2 Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre  $e$
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$
- 2.9 Suites complexes

### 3 Fonctions, Limites, continuité

### 4 Dérivées

### 5 Équations différentielles

**Définition**

Étant donnée une suite  $(x_n)$ , on appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) de  $(x_n)$  toute suite de la forme  $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction **strictement croissante**.

**Notation alternative** : les suites extraites sont notées aussi  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Cela est cohérent, car  $\phi$  définit une suite d'entiers, la suite croissante  $n_k = \phi(k)$ .

**Remarque.** Si  $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une autre fonction strictement croissante,  $x_{\psi \circ \phi(n)} = x_{\psi(\phi(n))}$  sera alors une nouvelle extraction (une sous-sous-suite) de la suite de départ. Ou avec la notation alternative,  $(x_{n_{k_\ell}})$ .



Lorenzo Brandolese

**Proposition**

Si  $(x_n)$  est une suite convergente vers  $\ell$ , alors toute suite extraite de  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Dém.** [Au tableau].

**Question**

Vrai ou faux ?

- Si  $(x_{2n})$  et  $(x_{2n+1})$  convergent, alors  $(x_n)$  converge.
- Si  $x_{2n} \rightarrow \ell$  et  $x_{2n+1} \rightarrow \ell$ , alors  $x_n \rightarrow \ell$ .
- Si  $(x_{2n})$ ,  $(x_{2n+1})$  et  $(x_{3n})$  convergent, alors  $(x_n)$  converge.



Lorenzo Brandolese

**Théorème (de Ramsey)**

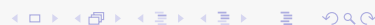
*Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.*

**Dém.** [Voir les approfondissements]

**Théorème (de Bolzano-Weierstrass)**

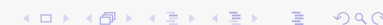
*Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

**Dém.** [Au tableau]



Lorenzo Brandolese

- 1 Introduction à  $\mathbb{R}$
- 2 Suites numériques
  - 2.1 Raisonnements par récurrence
  - 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli
  - 2.3 Limite d'une suite
  - 2.4 Propriétés des limites
  - 2.5 Suites monotones
  - 2.6 Suites géométriques et nombre  $e$
  - 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano-Weierstrass
  - 2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$
  - 2.9 Suites complexes
- 3 Fonctions, Limites, continuité
- 4 Dérivées
- 5 Équations différentielles



Lorenzo Brandolese

**Définition**

Une suite réelle est dite **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall m, m \geq n_0 \text{ on a } |u_m - u_n| < \epsilon.$$

**Lemme**

Toute suite de Cauchy est bornée.

**Théorème ( $\mathbb{R}$  est complet)**

Dans  $\mathbb{R}$ , une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

**Dém.** [Au tableau]

**Définition**

Un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  est dit **complet** s'il a la propriété que toute suite de Cauchy  $(x_n)$  contenue dans  $A$  converge vers une limite  $\ell \in A$ .

**Question**

- $\mathbb{Q}$  est-il complet ?
- Et  $\mathbb{Z}$  ?

**Exercice (série harmonique)**

Vérifier que la suite

$$S_n \stackrel{\text{déf}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

n'est pas de Cauchy et conclure que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ .

**1** Introduction à  $\mathbb{R}$ **2** Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre  $e$
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de  $\mathbb{R}$
- 2.9 Suites complexes

**3** Fonctions, Limites, continuité**4** Dérivées**5** Équations différentielles

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire des nombres de la forme :

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On munit  $\mathbb{C}$  des opérations de sommes et produit définies par

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \text{ où } z = a + ib, z' = a' + ib', \text{ avec } a, a', b, b' \in \mathbb{R} :$$

$$z + z' \stackrel{\text{déf}}{=} (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' \stackrel{\text{déf}}{=} (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

**Théorème**

L'ensemble  $\mathbb{C}$ , muni de ces opérations de somme et produit est un corp commutatif.

[Voir les cours d'algèbre pour plus de détails.]

**Définition**

Si  $z = a + ib$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  est comme ci-dessus, on appelle  $a$  la **partie réelle** et  $b$  la **partie imaginaire** de  $z$ . Le nombre

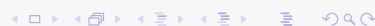
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

s'appelle le **module** de  $z$ .

**Proposition**

Si  $z \in \mathbb{C}$  est comme ci-dessus, on a  $|z| \in \mathbb{R}^+$  et

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |z| \leq |a| + |b|.$$

**Convergence des suites complexes****Définition**

On dit qu'une suite de nombres complexes  $(z_n)$  **converge** vers  $z \in \mathbb{C}$  (et on écrit  $z_n \rightarrow z$ ) si et seulement si la suite des nombres réels  $(|z_n - z|)$  vérifie

$$|z_n - z| \rightarrow 0.$$

**Proposition**

Soit  $(z_n)$  une suite de nombres complexes, avec  $z_n = a_n + ib_n$ , et  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , où  $a_n, a, b_n, b$  sont les parties réelles et imaginaires de  $z_n$  et  $z$  respectivement. Alors  $z_n \rightarrow z$  si et seulement si  $a_n \rightarrow a$  et  $b_n \rightarrow b$ .

**Dém.** Cela découle des inégalités (exercice)

$$\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leq |z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

, et du théorème des gendarmes.

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 3.1 Domaine, Image, Inversibilité

## 3.2 Fonctions élémentaires

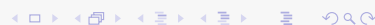
## 3.3 Limite d'une fonction

## 3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

## 3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles



Une **fonction réelle** est une application  $f: D \rightarrow A$ , où  $D \subset \mathbb{R}$  et  $A \subset \mathbb{R}$ . L'ensemble  $D$  est le **domaine de définition** de  $f$ .

Il convient toujours de préciser  $D$  avec la définition de  $f$ . À défaut, on prend

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ "a un sens"}\}.$$

[Exemples au tableau]

**Définition**

Soit  $f: D \rightarrow A$  une fonction réelle.

- $\text{Im}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(x) \in A \mid x \in D\}$  est l'**image** de  $f$ .
- Si  $E \subset D$ , on note  $f(E) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(x) \in A \mid x \in E\}$  ("image de  $E$  par  $f$ ")
- Si  $B \subset A$ , on note  $f^{-1}(B) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in D \mid f(x) \in B\}$  ("image réciproque" de  $B$  par  $f$ ).
- $G_f \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, f(x)) \in D \times A \mid x \in D\}$  est le "graphe de  $f$ ".

[Exemples au tableau]





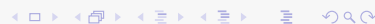
### Definition (fonctions injectives, surjectives)

- $f: D \rightarrow A$  est **injective** dans  $D$  si  $\forall x_1, x_2 \in D$ , avec  $x_1 \neq x_2$ , on a  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- $f: D \rightarrow A$  est **surjective** sur  $A$  si  $\forall y \in A, \exists x \in D$  tel que  $f(x) = y$ .
- $f: D \rightarrow A$  est **bijective** si elle est injective dans  $D$  et surjective sur  $A$ . Dans ce cas, on peut construire la **fonction réciproque** de  $f$ , c'est-à-dire la fonction  $f^{-1}: A \rightarrow D$ , où

$$\forall x \in D, y \in A, \quad f^{-1}(y) \stackrel{\text{déf}}{=} x \iff f(x) = y$$

### Proposition

Un point  $(y_0, x_0)$  appartient au graphe de  $f^{-1}$  si et seulement si le point  $(x_0, y_0)$  appartient au graphe de  $f$ . Les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont alors symétriques par rapport à la bissectrice d'équation  $y = x$ .



Lorenzo Brandolese

Noter que  $\forall y \in B, f \circ f^{-1}(y) = y$ , et  $\forall x \in D, f^{-1} \circ f(x) = x$ .  
En exprimant ceci à l'aide des "fonctions identités" :

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_A, \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_D$$

### Ne pas confondre :

$f(x)^{-1}$  (le réciproque du nombre réel  $f(x)$ ), avec  
 $f^{-1}(x)$  (la fonction réciproque de  $f$  évaluée en  $x$ ).

**Exemple :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = 2x + 3$  :

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{2x+3}, \quad \text{mais} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Pour éviter ce type de confusion, on donne des noms spéciaux à certaines fonctions réciproques importantes (comme arcsin, arctan, ln etc.).



Lorenzo Brandolese

### Opérations sur les fonctions

- Si  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  on définit la "fonction somme"  $f + g$  et la "fonction produit  $fg$ "

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) + g(x), \quad (fg)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x)g(x).$$

- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  on note  $\lambda f$  la fonction

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- Il y a une relation d'ordre **partielle** :

$$f \leq g \iff \forall x \in D, \quad f(x) \leq g(x).$$

- Si  $f: D \rightarrow A$  et  $g: A \rightarrow B$ , on définit la **composée**  $f$  et  $g$  :

$$g \circ f: D \rightarrow B, \quad g \circ f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} g(f(x)).$$

### Question

L'opération  $\circ$ , sur l'ensemble des fonctions :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est-elle associative/commutative ?



Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

3.1 Domaine, Image, Inversibilité

3.2 Fonctions élémentaires

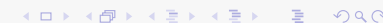
3.3 Limite d'une fonction

3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

4 Dérivées

5 Équations différentielles



Lorenzo Brandolese

## Fonctions élémentaires

- Les fonctions affines :  $f(x) = ax + b$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$
- Les fonctions puissances :  $f(x) = x^m$ , où  $m \in \mathbb{Z}$ .
- Les fonctions racines  $n$ -ièmes :  $f(x) = x^{1/n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Les fonctions trigonométriques sin, cos et tan.
- Les fonctions exp et ln [sans définition pour l'instant]

[Graphes au tableau]

### Définition

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $D \subset \mathbb{R}$  est symétrique par rapport à 0. On dit que  $f$  est **paire** si, pour tout  $x \in D$ , on a  $f(-x) = f(x)$  et **impaire** si  $f(-x) = -f(x)$ .

### Définition

On dit qu'une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est **périodique** de période  $T > 0$  si, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f(x + T) = f(x)$ .

Lorenzo Brandolese

## 1 Introduction à $\mathbb{R}$

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

3.1 Domaine, Image, Inversibilité

3.2 Fonctions élémentaires

3.3 Limite d'une fonction

3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

Lorenzo Brandolese

## Intervalles

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle **non vide**, et **non réduit à un seul point** (c'est-à-dire l'un des ensembles de la forme, pour  $a < b$ ) :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ,  $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ,  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ,
- $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ,  $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ,
- $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ,  $] - \infty, a[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ,
- $] - \infty, \infty[ = \mathbb{R}$ .

Lorenzo Brandolese

Soit  $I$  un intervalle d'extrémités  $a < b$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

### Définition

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  par la droite, et l'on écrit  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } (a < x < a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- On dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $b$  par la gauche), et l'on écrit  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \ell$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } (b - \delta < x < b) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- Si  $a < x_0 < b$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , et l'on écrit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } (x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Autrement, dit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Lorenzo Brandolese

**Remarque.** Dans l'écriture  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , la valeur de  $f(x_0)$  ne joue aucun rôle. Lorsqu'on a  $f(x_0) = l$ , dit que  $f$  est **continue** en  $x_0$ .

**Question (limites à l'infini)**

Comment définir ces écritures ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

**Question (limites infinies)**

Comment définir ces écritures ?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Et celles-ci ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

[Quelques détails au tableau].

**Lien avec la limite des suites**

**Théorème**

Une fonction réelle  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet une limite  $l$  (avec  $l \in \mathbb{R}$ , ou  $l = \pm\infty$ ) en  $c$  (avec  $c \in \mathbb{R}$ , ou  $c = \pm\infty$ ) si et seulement si, pour toute suite  $(x_n) \subset I$  telle que  $(x_n \rightarrow c$  et  $\forall n \ x_n \neq c$ ), on a  $f(x_n) \rightarrow l$ .

**Dém.** [Au tableau]

**Question**

Que peut-on dire des limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$  ?

**Conséquences du théorème précédent**

**Théorème (Unicité de la limite d'une fonction)**

**Théorème (théorème des gendarmes)**

**Théorème (somme/produit/quotient de limites de fonctions)**

**Théorème (Limite des fonctions monotones)**

**Exercice**

En s'inspirant des résultats pour les limites des suites, énoncer ces 4 théorèmes. Les démontrer via le théorème de la diapositive précédente.

**Exercice**

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{[x]}$ .

Voici d'autres propriétés utiles des limites

**Proposition (passage à la limite dans une inégalité)**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que

$$f \leq g \quad l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) \quad \text{et} \quad l' = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} g(x)$$

(avec  $l$  et  $l'$  réels ou  $\pm\infty$ ). Alors

$$l \leq l'.$$

**Dém.** [Au tableau]

## Théorème (limite de la fonction composée.)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles, et  $f: I \rightarrow J$ ,  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = \ell, \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow \ell \\ y \in J}} g(y) = L$$

avec  $\ell$  et  $L$  réels ou éventuellement  $\pm\infty$  (et vérifiant de plus  $\forall x \in I, f(x) \neq \ell$  : mais cette condition est inutile si  $g$  est continue en  $\ell$ ). Alors,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} g \circ f(x) = L$$

Dém. [Au tableau]

## Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} + 2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+1}{y+2} = \frac{3}{4}.$$



## Utilisation des équivalents

- Si  $\ell \in \mathbb{R}^*$  :  $f \sim_{x_0} \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  (" $\Leftarrow$ " fausse si  $\ell = 0$ ).
- On peut multiplier et faire le quotient d'équivalents.
- On ne peut pas sommer ou composer les équivalents.

[Démonstration au tableau pour le produit.

Contreexemple pour la somme :  $f(x) = x + x^3$ ,  $g(x) = -x + x^2$ .

Contreexemple pour la composition  $g(x) = \exp(x) \not\sim_{+\infty} \exp(x+1)$ .]



## Notion d'équivalent

## Définition

On dit que deux fonctions réelles  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** en  $x_0$ , et on écrit  $f \sim_{x_0} g$  si l'on peut écrire  $f(x) = g(x)(1 + r(x))$ , où  $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$ .

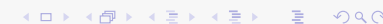
**Remarque** Dans le cas où  $g$  ne s'annule pas près de  $x_0$ , on a

$$f \sim_{x_0} g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

## Quelques équivalents remarquables

$$\begin{aligned} \sin(x) &\sim_0 x, & \cos(x) - 1 &\sim_0 -\frac{x^2}{2}, & \tan(x) &\sim_0 x \\ \exp(x) - 1 &\sim_0 x, & \ln(1+x) &\sim_0 x \end{aligned}$$

[Démonstration dans le chapitre suivant]



## L'exponentiel et le logarithme

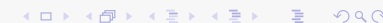
Même si les fonctions exponentielles et logarithme seront définies plus loin, on s'autorisera à utiliser dans les exercices, dès maintenant, les propriétés suivantes :

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement positive et strictement croissante
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a e^b$  et  $e^{-a} = 1/e^a$ .

Les notations  $e^x$  et  $\exp(x)$  sont équivalentes.

- $\ln: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , strictement croissante.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .
- $\forall a, b > 0, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$  et  $\ln(1/a) = -\ln(a)$ .

Les deux fonctions  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  et  $\ln: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  sont bijectives et sont **l'une la fonction réciproque de l'autre**



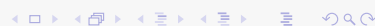
## Croissances comparées

## Proposition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^a} = 0$$

et

$$\forall a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{\ln(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln(x) = 0.$$



Lorenzo Brandolese

Soit  $I$  un intervalle,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

## Définition (fonction continue)

- On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $\forall x \in I$ ,  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Autrement dit :**  $f$  continue en  $x_0$  si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x \in I, \text{ et } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Ou encore, si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

## Théorème (continuité de la somme/produit/quotient/composée)

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soient  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0 \in I$ , alors les fonctions  $f + g$ ,  $fg$  et  $\lambda f$  sont continues en  $x_0$ . La composée de deux fonctions continues est continue.

**Dém.** Exercice (utiliser le théorème correspondant sur les limites).



Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 3.1 Domaine, Image, Inversibilité

## 3.2 Fonctions élémentaires

## 3.3 Limite d'une fonction

## 3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

## 3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles



Lorenzo Brandolese

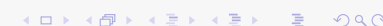
## Théorème

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue en  $\ell \in I$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $I$  convergente vers  $\ell$ . Alors  $f(x_n) \rightarrow f(\ell)$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

## Exemples de fonctions continues

- Les fonctions polynômes, la fonction  $|\cdot|$  (continues sur  $\mathbb{R}$ )
- Les fonctions rationnelles (continues sur les intervalles où le dénominateur ne s'annule pas).
- Les fonctions racines :  $\sqrt[n]{\cdot}$  (continues sur  $\mathbb{R}^+$  si  $n$  est pair et sur  $\mathbb{R}$  si  $n$  est impair. Admis pour l'instant).
- Les fonctions sin et cos (continues sur  $\mathbb{R}$ )
- La fonction exp (continue sur  $\mathbb{R}$ . Admis pour l'instant.)
- La fonction ln (continue sur  $]0, \infty[$ . Admis pour l'instant.)

[Détails au tableau]



Lorenzo Brandolese

## Quelques fonctions discontinues

- La fonction  $E(\cdot)$  (disc. sur les entiers).
- La fonction  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$  (disc. en 0, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ).
- La fonction  $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$  (disc. en 0 pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ).
- La fonction  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0, \end{cases}$  (disc. en 0 lorsque  $c \neq 1$ ).
- La fonction de Dirichlet :  $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  (disc. en tout point de  $\mathbb{R}$ ).

[Détails au tableau]

## 1 Introduction à $\mathbb{R}$

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

3.1 Domaine, Image, Inversibilité

3.2 Fonctions élémentaires

3.3 Limite d'une fonction

3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

## 4 Dérivées

## 5 Équations différentielles

### Théorème (de Weierstrass)

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes, c'est-à-dire que :

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

et

$$\exists c' \in [a, b] \text{ tel que } f(c') = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

- On dit que  $c$  est le **point de maximum absolu** pour  $f$  dans  $[a, b]$  et que  $f(c)$  est le **maximum absolu** de  $f$  dans  $[a, b]$ .

**Dém.** [Voir les approfondissements]

### Corollaire

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, telle que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ . Alors  $f$  possède un point de minimum absolu dans  $\mathbb{R}$ .

**Dém.** [Au tableau]

Rappelons que les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les parties  $J$  de  $\mathbb{R}$  caractérisées par la propriété suivante :

$$x, y \in J, \quad x < c < y \quad \Rightarrow \quad c \in J.$$

### Théorème (des valeurs intermédiaires)

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f(I)$  est un intervalle.

Autrement dit : Si  $f$  prend dans  $I$  les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ , alors  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Dém.** [Voir les approfondissements] **Exemple d'application :** Toute équation de la forme  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (où  $a \neq 0$  et  $b, c, d \in \mathbb{R}$ ) possède au moins une solution  $x \in \mathbb{R}$ .

**Théorème (Continuité de la fonction inverse)**

Soit  $I$  un intervalle et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et injective dans  $I$ .  
On pose  $J = f(I)$ . Alors,

- $f$  est strictement monotone dans  $I$ .
- la fonction réciproque  $f^{-1}: J \rightarrow I$  est strictement monotone, et continue dans  $J$ .

**Dém.** [Voir approfondissements]

**Exemple d'application :** la continuité des fonctions racines :  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  sur  $\mathbb{R}^+$  (si  $n$  est pair) ou sur  $\mathbb{R}$  (si  $n$  est impair).

1 Introduction à  $\mathbb{R}$

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6  $\ln$  comme primitive de  $1/x$  et  $\exp$  comme réciproque de  $\ln$

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

**Définition (fonctions circulaires inverses)**

- La fonction arcsin:  $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est la réciproque de la fonction sin:  $[-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
- La fonction arccos:  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  est la réciproque de la fonction cos:  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ .
- La fonction arctan:  $\mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est la fonction réciproque de la fonction tan:  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

[Dessins au tableau].

*Ces fonctions sont continues sur leur ensemble de définition.*

**Motivation géométrique**

Rappelons que  $y = mx + b$  est l'équation d'une droite de pente (ou coefficient directeur)  $m$ , passant par  $b$  en  $x = 0$ .

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $x_0 + h \in I$ .

La droite d'équation

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

est la droite passant par les points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  du graphe de la fonction  $f$ .

Intuitivement, en calculant la limite pour  $h \rightarrow 0$  on obtiendra l'équation de la droite tangente au graphe de  $f$  au point  $(x_0, f(x_0))$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle d'extrémités  $a < b$ .

**Définition**

- On dit que  $f$  est dérivable à droite au point  $a$  s'il existe **finie** la limite (notée  $f'(a^+)$  et appelée **dérivée à droite de  $f$  en  $a$** ),

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(a+h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que  $f$  est dérivable à gauche au point  $b$  s'il existe **finie** la limite (notée  $f'(b^-)$  **dérivée à gauche de  $f$  en  $b$** ),

$$f'(b^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(b+h) - f(a)}{h}.$$

- Si  $a < x_0 < b$ , on dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et les dérivées à gauche et à droite coïncident :

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$



**Définition**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable en tout point de  $I$ , on peut définir une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$  ou  $\frac{df}{dx}$ , telle que  $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

**Interpretation cinématique**

Considérons un point  $P$  qui se déplace le long d'une droite sur l'axe  $x$ , occupant à l'instant  $t$  la position  $p = p(t) \in \mathbb{R}$ . La vitesse moyenne de  $P$  dans l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + h]$  est  $\frac{p(t_0+h) - p(t_0)}{h}$ . La **vitesse instantanée**  $v(t_0)$  de  $P$  à l'instant  $t_0$  est définie, et se calcule, en prenant la limite  $h \rightarrow 0$ . On a alors

$$v(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dp}{dt}(t).$$

**Notations alternatives**

$$p'(t) = \frac{dp}{dt}(t) = \dot{p}(t) = p_t(t).$$



**Exemple**

- La dérivée d'une fonction constante est nulle.
- La fonction  $f(x) = |x|$ , en  $x_0 = 0$  est dérivable à droite et à gauche. On a  $f'(0^+) = 1$  et  $f'(0^-) = -1$ , mais  $f$  n'est pas dérivable en 0.
- La fonction  $g(x) = \sqrt{x}$  est dérivable en  $x_0$ , pour tout  $x_0 > 0$ , avec  $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

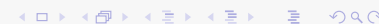
Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle d'extrémités  $a < b$  et  $a < x_0 < b$  une fonction dérivable en  $x_0$ .

**Définition (Droite tangente)**

La **droite tangente** au graphe de la fonction  $f$  au point  $x_0$  est la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La dérivée  $f'(x_0)$  est donc le **coefficient directeur** de la droite tangente au graphe de la fonction au point  $(x_0, f(x_0))$ .



- Introduction à  $\mathbb{R}$
- Suites numériques
- Fonctions, Limites, continuité
- Dérivées**
  - 4.1 Motivation et définition de la dérivée
  - 4.2 Dérivées des fonctions classiques
  - 4.3 Opérations avec les fonctions dérivables
  - 4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables
  - 4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe
  - 4.6 ln comme primitive de  $1/x$  et exp comme réciproque de ln
  - 4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité
- Équations différentielles





### Définition (Notation de Landau : "petit-o")

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies dans un intervalle contenant  $x_0$ , dit que  $f$  est négligeable devant  $g(x)$ , et l'on écrit

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pour } x \rightarrow x_0 \iff \begin{array}{l} \exists \epsilon(x) \text{ telle que } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0 \text{ et,} \\ f(x) = g(x)\epsilon(x) \end{array}$$

- $f(x) = o(1)$  pour  $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .
- $x^2 = o(x)$  pour  $x \rightarrow 0$ . D'autre part  $x = o(x^2)$  pour  $x \rightarrow +\infty$ .
- Si  $f_1(x) = o(g_1(x))$  et  $f_2(x) = o(g_2(x))$  alors  $f_1 f_2(x) = o(g_1 g_2(x))$ , pour  $x \rightarrow x_0$ .
- $(f_1 + f_2)(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_1(x))$ , si  $g_2(x) = o(g_1(x))$  ou  $g_1(x) \sim g_2(x)$  pour  $x \rightarrow x_0$   
 $(f_1 + f_2)(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_2(x))$ , si  $g_1(x) = o(g_2(x))$  ou  $g_1(x) \sim g_2(x)$  pour  $x \rightarrow x_0$
- On a **pas le droit** soustraire/simplifier les  $o(\dots)$ .

Lorenzo Brandolese

### Exemples de fonctions dérivables

Les fonctions suivantes sont dérivables dans leur ensemble de définition.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ , si  $f(x) = x^n$ , alors  $f'(x) = n f(x)^{n-1}$ .
- Si  $f(x) = \sin(x)$ , alors  $f'(x) = \cos(x)$ .
- Si  $f(x) = \cos(x)$ , alors  $f'(x) = -\sin(x)$ .
- Si  $f(x) = \exp(x)$ , alors  $f'(x) = \exp(x)$
- Si  $f(x) = \ln(x)$  alors  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , pour tout  $x > 0$ .

[Dém. Admis pour exp et ln. Au tableau les autres.

En particulier, on démontre ici géométriquement les limites remarquables en 0,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$ .]

Lorenzo Brandolese

### Proposition

$f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h), \quad \text{pour } h \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, on a  $m = f'(x_0)$ .

On déduit de cette proposition que :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Lorenzo Brandolese

## 1 Introduction à $\mathbb{R}$

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 ln comme primitive de  $1/x$  et exp comme réciproque de ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

## 5 Équations différentielles

Lorenzo Brandolese

## Théorème

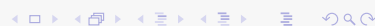
Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $x$ . Alors  $f + g$  et  $fg$  sont dérivables en  $x$ . Si  $g(x) \neq 0$ ,  $f/g$  est dérivable en  $x$ . De plus, on a les formules :

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ .

[Dém. Au tableau]

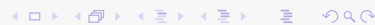
## Exemple

- La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale.
- Si  $f(x) = x^n$ , alors  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Cette formule, déjà rencontrée pour  $n \in \mathbb{N}$ , reste vraie si  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Si  $f(x) = \tan(x)$ , alors  $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$ , pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .



## Applications

- Si  $a = \frac{m}{n}$ , avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , et  $f(x) = x^a$ , on a  $f'(x) = ax^{a-1}$ , pour  $x > 0$ . En particulier (si  $a = 1/2$ ), si  $f(x) = \sqrt{x}$ , on a  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , pour  $x > 0$ .
- La fonction arcsin:  $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est dérivable en  $] -1, 1[$  et  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- La fonction arccos:  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  est dérivable en  $] -1, 1[$  et  $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- La fonction arctan:  $\mathbb{R} \rightarrow ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est dérivable pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .



Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

## Théorème (Dérivée de la fonction composée)

Si  $f: I \rightarrow J$  et  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  sont telles que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  alors la fonction composée  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$ , et on a la formule

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

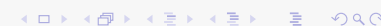
## Exemple

$$f(x) = (\sin x)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10(\sin x)^9 \cos x.$$

## Théorème (Dérivée de la fonction inverse)

Soit  $f: I \rightarrow J$  une fonction bijective, dérivable en  $x_0 \in I$ , avec  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors la fonction réciproque  $f^{-1}: J \rightarrow I$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0) \in J$ , et l'on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

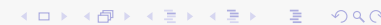
4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6  $\ln$  comme primitive de  $1/x$  et  $\exp$  comme réciproque de  $\ln$

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

## 5 Équations différentielles



## Définition

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in ]a, b[$ . On dit que  $x_0$  est un point de **minimum local** pour  $f$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(x_0) = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$ . On dit que  $x_0$  est un point de **maximum local** pour  $f$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(x_0) = \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$ .

## Proposition

Soit  $I = ]a, b[$  et  $x_0 \in I$  un extremum local (c'est-à-dire un minimum ou un maximum local) de la fonction  $f$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

## Théorème (de Rolle)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue dans  $[a, b]$  et dérivable dans  $]a, b[$ . Si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $x \in ]a, b[$  tel que  $f'(x) = 0$ .

Lorenzo Brandolese

## Théorème (de Cauchy)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues dans l'intervalle  $[a, b]$  et dérivables dans  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

**Dém.** Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$x \mapsto (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Le cas particulier  $g(x) = x$  du théorème de Cauchy donne le résultat fondamental suivant :

## Théorème (des accroissements finis)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue dans  $[a, b]$  et dérivable dans  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lorenzo Brandolese

## Applications

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus on obtient une inégalité très importante :

## Inégalité des accroissements finis

$$|f(b) - f(a)| \leq \left( \sup_{c \in ]a, b[} |f'(c)| \right) |b - a|.$$

Et voici une autre application du théorème des accroissements finis.

## Corollaire

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en tout point de l'intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est croissante si et seulement si  $f' \geq 0$  dans  $I$ . Elle est décroissante si et seulement si  $f' \leq 0$  dans  $I$ .
- Si  $f' > 0$  dans  $I$  alors  $f$  est strictement croissante dans  $I$ . Si  $f' < 0$  dans  $I$  alors  $f$  est strictement décroissante.

Lorenzo Brandolese

Le théorème suivant est un outil très pratique dans le calcul des limites se présentant sous la forme indéterminée  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

## Théorème (de l'Hospital)

Soit  $a \in I$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I \setminus \{a\}$ , telles que  $f(a) = g(a) = 0$  et  $g, g'$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{a\}$ . On suppose en outre que  $f'/g'$  a une limite  $\ell$  (finie ou infinie) en  $x_0$ . Alors,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

**Dém.** Considérer une suite  $x_n \rightarrow a^+$ , ensuite une suite  $x_n \rightarrow a^-$  et appliquer le théorème de Cauchy. (Plus de détails au tableau).

## Variantes du théorème de l'Hospital

- En imposant des conditions convenables sur  $f$  et  $g$ , on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- La formule de l'Hospital s'applique aussi aux limites sous la forme indéterminée  $[\infty/\infty]$ .

Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6  $\ln$  comme primitive de  $1/x$  et  $\exp$  comme réciproque de  $\ln$ 

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

## 5 Équations différentielles

## Exemple

Étudier et tracer le graphe de la fonction  $f(x) = \frac{(x-a)^{2/3}}{x}$ , où  $a > 0$  est un paramètre.

## Exemple

Toute fonction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

avec  $a_n \neq 0$  et  $b_{n-1} \neq 0$ , ( $n$  entier  $\geq 2$ ) possède des asymptotes en  $\pm\infty$ , d'équation

$$y = \frac{a_n}{b_{n-1}} x + \frac{b_{n-1} a_{n-1} - a_n b_{n-2}}{b_{n-1}^2}.$$

## Comment tracer le graphe d'une fonction ?

- 1 Reconnaître si la fonction est paire, impaire ou périodique, ou si elle présente d'autres symétries évidentes.
- 2 Déterminer le domaine de définition  $D$  de la fonction.
- 3 Étudier le signe de  $f$  et si possible en trouver les zéros.
- 4 Étudier les limites de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers les bords du domaine  $D$ . Si  $D$  est non borné, étudier les limites pour  $x \rightarrow \pm\infty$  et chercher les éventuels asymptotes en  $\pm\infty^1$ .
- 5 Trouver les éventuels points de discontinuité de  $f$ . Calculer  $f'$ . Trouver les éventuels points de non dérivabilité et étudier la limite de  $f'$  en ces points.
- 6 Chercher à résoudre dans  $D$  les inégalités  $f'(x) \geq 0$  et  $f'(x) \leq 0$ . En déduire le tableau des variations de la fonction  $f$ , c'est à dire les intervalles où  $f$  est croissante et décroissante.
- 7 Déduire du tableau des variations les point d'extrema locaux de  $f$ . Si possible calculer la valeur de  $f$  en ces points.
- 8 Tracer le graphe en prenant en compte **tous** ces éléments.

1. On dit qu'une droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote pour la fonction  $f$  en  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ . Noter que les formules  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$  et  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$  permettent de trouver l'équation de l'asymptote

1 Introduction à  $\mathbb{R}$ 

## 2 Suites numériques

## 3 Fonctions, Limites, continuité

## 4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6  $\ln$  comme primitive de  $1/x$  et  $\exp$  comme réciproque de  $\ln$ 

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

## 5 Équations différentielles

## Notion de primitive

### Définition

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle. Toute fonction  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $F' = f$  s'appelle **primitive** de  $f$ .

### Théorème

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$ . Alors  $f$  admet une primitive. De plus, si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors  $G$  est une autre primitive sur  $I$  si et seulement si  $G = F + c$ , où  $c \in \mathbb{R}$  est constante.

**Dém.** Voir le cours d'Analyse II : il s'agira de définir  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  où  $a$  est un point arbitrairement choisi de  $I$ .

**Remarque.** La fonction discontinue de Heaviside,  $H(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $H(x) = 0$  si  $x < 0$  n'admet pas de primitive sur  $\mathbb{R}$ .

Lorenzo Brandolese

Lorenzo Brandolese

## La fonction exponentielle

### Définition

La fonction  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est la fonction réciproque de la fonction  $\ln: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\forall x > 0, \quad \exp(\ln(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

**Notation.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $e^x = \exp(x)$ .

Voici les conséquences immédiates de cette définition

- 1  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est bijective. De plus,  $\exp(0) = 1$ .
- 2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- 3  $\exp$  est dérivable dans  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$ .
- 4  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a  $e^{x+y} = e^x e^y$ ,  $e^{x-y} = e^x / e^y$ ,  $e^{nx} = (e^x)^n$ .

### Définition

On définit le nombre  $e = \exp(1)$ .

On obtient ainsi un nombre irrationnel, qui vaut environ 2,718... (voir cours d'Analyse II). On peut démontrer que  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Lorenzo Brandolese

Lorenzo Brandolese

## Le logarithme naturel

### Définition (logarithme naturel ou népérien)

La fonction  $\ln: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme l'unique primitive sur l'intervalle de la fonction  $x \mapsto 1/x$  qui s'annule en  $x = 1$  :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{pour } x > 0, \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

À partir de cette définition, on trouve facilement les propriétés suivantes

- 1  $\ln$  est croissante sur  $]0, \infty[$ .
- 2  $\forall x, y > 0$ , on a  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  et  $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$ .
- 3  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x > 0$ ,  $\ln(x^n) = n \ln(x)$ ,  $\frac{1}{n} \ln(x) = \ln(\sqrt[n]{x})$ .
- 4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ .
- 5  $\ln: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective.

**Notation ambiguë :** pour les mathématiciens,  $\log(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln(x)$ . Pour les autres (et sur les calculatrices)  $\log(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln(x)/\ln(10)$ , ce qui correspond au logarithme en base 10 de  $x$ .

## Puissance réelle d'un réel positif

### Définition

Si  $x > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  on pose

$$x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\alpha \ln(x)}.$$

Cette définition est compatible avec la définition usuelle de puissance lorsque  $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ . On observera qu'alors  $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$  et  $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$ . On remarque la formule :

$$f(x) = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En particulier la fonction  $x^\alpha$  est croissante. On vérifie immédiatement que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ . En appliquant des variantes du théorème de l'Hospital on obtient les **résultats de croissance comparée**.

### Proposition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

Lorenzo Brandolese

Lorenzo Brandolese

1 Introduction à  $\mathbb{R}$

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 **Dérivées**

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 ln comme primitive de  $1/x$  et exp comme réciproque de ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

**Définition**

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **convexe** dans  $I$  si sont pour tout  $x_0 < x_1$  dans  $I$ , le graphe de la fonction dans l'intervalle  $[x_0, x_1]$  reste en dessous du segment d'extrémités  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_1, f(x_1))$ . Autrement dit :

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

On dit que  $f$  est **concave** dans  $I$  si  $-f$  est convexe dans  $I$ .

**Exemple**

La fonction  $f(x) = x^3$  est convexe dans  $\mathbb{R}^+$  et elle est concave dans  $\mathbb{R}^-$ . L'origine est un point d'inflexion pour  $f$  (on point où la fonction change de concavité)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, telle que la fonction dérivée  $f'$  est elle-même dérivable dans  $I$ . La dérivée de la fonction  $f'$  s'appelle **dérivée seconde** de  $f$  elle est notée  $f''$ . On définit de la même manière les dérivées d'ordre plus élevé,  $f'''$ , etc.

Le théorème principal sur les fonctions convexe est le suivant :

**Théorème**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable dans  $I$ . Alors :

- $f$  est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de chacune de ses droites tangentes.
- $f$  est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur  $I$ .
- $f$  est convexe si et seulement si sa dérivée seconde  $f'' \geq 0$  (sous l'hypothèse supplémentaire que  $f$  est deux fois dérivable dans  $I$ ).

**Dém.** [Admise]

La notion de convexité joue un rôle important in optimisation. Par exemple, on peut démontrer que si  $x_0$  est un point interne à l'intervalle  $I$  vérifiant  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) > 0$ , alors  $x_0$  est un **minimum local**. Si de plus  $f'' > 0$  dans  $I$ , alors  $x_0$  est un point de **minimum global** sur  $I$ .

1 Introduction à  $\mathbb{R}$

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 **Dérivées**

5 Équations différentielles

5.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

## Introduction

Une équation différentielle (ED) d'ordre 1 est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $I$  est un intervalle), que l'on cherche à trouver à partir d'une relation donnée entre  $f$  et sa dérivée  $f'$ , de la forme

$$\Phi(x, f(x), f'(x)) = 0, \quad x \in I, \quad (\text{ED})$$

où  $\Phi = \Phi(x, u, v)$  est une fonction donnée de trois variables. Dans ce cours nous verrons comment résoudre des équations différentielles de la forme suivante :

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad x \in I \quad (\text{NH})$$

où  $a: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b: I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions **continues** sur  $I$  données, et  $f$  est la fonction inconnue.

Cela correspond dans (ED) au choix  $\Phi(x, u, v) = v + a(x)u - b(x)$ . En particulier, l'application  $(u, v) \mapsto \Phi(x, u, v)$  est linéaire pour tout  $x$ . C'est pourquoi on dit que (NH) est une équation différentielle **linéaire** d'ordre 1 (non-homogène).



Un exemple d'une ED non-linéaire serait par exemple  $f'(x) + f(x)^3 = x$ , ou encore  $\sin(f'(x))f(x) = 1$  : dans le premier cas  $\Phi(x, u, v) = u^3 + v - x$  et dans le second  $\Phi(x, u, v) = -1 + u \sin(v)$ . Ce ne sont pas des applications linéaires en  $(u, v)$ . On ne sait pas résoudre en général des ED non-linéaires.

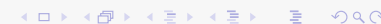
Commençons par traiter un cas particulier simple de (NH), celui des équations dites **homogènes**, c'est-à-dire de la forme

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0, \quad x \in I. \quad (\text{H})$$

### Théorème

Soit  $a: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Les solutions  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  de l'équation différentielle (H) sont toutes de la forme  $f(x) = \lambda \exp(-A(x))$  où  $A$  est une primitive de  $a$  et  $\lambda$  une constante réelle.

**Dém.** Au tableau.



Bien souvent, dans les équations différentielles la variable  $x$  s'interprète comme un temps, et on a en général une information supplémentaire sur  $f$ , de la forme  $f(x_0) = y_0$ . Autrement dit, on suppose connue qu'à l'instant  $x_0$   $f$  vaut  $y_0$ . On appelle cet information une **condition initiale**.

### Exemple (datation par le carbone 14)

Une matière radioactive perd dans l'unité de temps une proportion constante ( $= a$ ) de sa masse :  $\Delta M = -aM\Delta t$ . La masse vérifie alors l'ED  $M'(t) = -aM(t)$ . La proportion de masse radioactive restante après un temps  $t$  est donc  $M(t)/M(0) = e^{-at}$ .

Dans le cas du carbone 14, on sait que  $M(t)/M(0) = 1/2$  après 5500 années (ceci permet de calculer le paramètre  $a$ ) et ensuite de dater des ossements en mesurant la quantité de carbone 14 restante  $M(t)$  par la formule  $t = \frac{1}{a} \ln(M(0)/M(t))$ .



## Résolution des équations différentielles de la forme (NH)

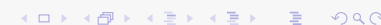
$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad x \in I \quad (*)$$

### Théorème

- Soit  $g$  une solution de (NH). Alors les fonctions  $f$  de la forme  $f(x) = g(x) + \lambda \exp(-A(x))$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont aussi solution de (NH), et il n'y en a pas d'autres.
- Si  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , alors il existe une et une seule solution  $f(x)$  de l'équation (NH) vérifiant de plus la condition  $f(x_0) = y_0$ .

On exprime la première partie du théorème en disant que la solution générale de (NH) est égale à la solution générale de (H) plus une solution particulière de (NH).

**Dém.** Au tableau.





### La méthode de variation de la constante

Cette méthode permet de construire une fonction  $g(x)$  solution particulière de l'équation (NH). La méthode consiste à chercher  $g(x)$  parmi les fonctions de la forme

$$g(x) = \lambda(x) \exp(-A(x)),$$

où  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  est à déterminer. Un petit calcul montre que  $\lambda(x)$  vérifie :

$$\lambda'(x) = b(x) \exp(A(x)).$$

Il suffit alors de calculer d'une primitive de  $b(x) \exp(A(x))$ , ce qui est toujours possible si  $b(x)$  est continue sur  $I$ .

### Comment trouver une primitive d'une fonction ? [suite]

- Ou sinon, en cherchant des primitives  $F(x)$  de la même forme que la fonction  $f(x)$  : cela marche bien lorsque  $f(x) = P(x) \exp(cx)$ , ou  $f(x) = P(x)(a \sin(x) + b \cos(x))$ , avec  $P(x)$  polynômiale.
- Ou en appliquant des techniques telles que l'intégration par parties ou l'intégration par changement de variable (voir cours d'Analyse II).

#### Exemple

Trouver l'unique solution  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  du système suivant (dit "problème de Cauchy") :

$$\begin{cases} f'(x) + 4f(x) = x^2 + 1 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

### Comment trouver une primitive d'une fonction ?

On a vu que la résolution d'équations différentielles de la forme (NH) se réduit au calcul d'une primitive  $A(x)$  de  $a(x)$  et ensuite d'une primitive de la fonction  $b(x) \exp(A(x))$ .

Pour trouver une primitive d'une fonction  $f(x)$  dans la pratique on peut :

- Si la fonction  $f$  est dans le tableau ci-dessous, alors une primitive  $F$  est à connaître par coeur :

$f(x)$	$F(x)$
$x^a$	$x^{a+1}/(a+1), \quad a \neq -1$
$1/x$	$\ln( x )$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\phi'(x)g(\phi(x))$	$G(\phi(x)), \text{ où } G \text{ primitive de } g$

### Équations pouvant se ramener à la forme (NH)

Pour résoudre les équations de la forme

$$\alpha(x)f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad x \in I$$

on divisee par  $\alpha(x)$  et on se ramène à une équation de type (\*).

Cependant, si  $\alpha(x)$  s'annule en  $I$  ceci exige de découper  $I$  en plusieurs intervalles où  $\alpha(x)$  ne s'annule pas, et d'étudier séparément l'équation  $f'(x) + \frac{a(x)}{\alpha(x)}f(x) = \frac{b(x)}{\alpha(x)}$  en ces sous-intervalles. Ensuite il s'agit d'étudier les raccordements de ces solutions.

#### Équations à variables séparables

Ce sont les équations différentielles (d'inconnue  $f = f(x)$ ) pouvant se ramener aux équations de la forme

$$f'(x)g(f(x)) = h(x), \quad x \in I. \quad (\ominus)$$

Si  $G$  est une primitive de  $g$  et  $H$  est une primitive de  $h$ , alors on a  $G(f(x)) = H(x) + c$ , où  $c$  est une constante. Cette relation peut être utilisée pour calculer  $f(x)$ .



**Exemple**

Un TGV de 400 tonnes est équipé d'un moteur de 8 MeW. Initialement à l'arrêt, le train accélère avec pleine puissance. Quelle sera sa vitesse après 10 secondes, si l'on néglige les forces de friction ?

**Réponse.** On note  $x(t)$  la distance parcourue à l'instant  $t$ ,  $v(t) = x'(t)$  la vitesse,  $f(t) = mx''(t)$  la force exercée par le moteur (loi de Newton), où  $m = 400 \cdot 10^3$  Kg est la masse. La puissance (supposée ici constante) est donnée par la relation  $P(t) = f(t)v(t) = P_0 = 8 \cdot 10^6$  W. On a  $mv'(t)v(t) = P_0$ , qui est une équation différentielle à variables séparables, d'inconnue  $v = v(t)$ . De plus  $v$  vérifie la condition initiale  $v(0) = 0$ . Ainsi,  $v(t) = \sqrt{2P_0 t/m}$ . Après  $t = 10$  secondes, on a  $v = 20$  metres/seconde (= 72 Km/h).