Cours d'Analyse I : les réels et les fonctions

Lorenzo Brandolese

Université Lyon 1
Institut Camille Jordan – CNRS UMR 5208 FRANCE

Automne 2015 - Licence L1

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^*$, etc.
- $\forall$, $\exists$, etc.
- $\in$, $\subset$, etc.
- $\Rightarrow$, $\iff$, etc.

[Détails au tableau]

Définition (L'ensemble des nombres réels)

$$\mathbb{R} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{ m, \alpha_1\alpha_2\ldots \mid m \in \mathbb{Z}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\},$$
$$\text{avec les } \alpha_j \text{ pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang} \Big\}.$$

- Pour simplifier les notations on écrit, par exemple

$$4,23 \overset{\text{déf}}{=} 4,23000\ldots \in \mathbb{R}.$$

- Même si la définition précedente exclut a priori des nombres tels que $5,32999\ldots$, on décide de donner un sens à ces nombres en imposant, par exemple, $5,32999\ldots = 5,33$, ou encore $0,999\ldots = 1$.

Définition (L'ensemble des nombres rationnels)

$$\mathbb{Q} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}$$

L'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ repose sur des faits bien connus :

- Toute fraction $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$) s'écrit bien sous la forme
$$\frac{p}{q} = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$
L'algorithme de la division permet de calculer, l'un après l'autre, l'entier $m \in \mathbb{Z}$ et les chiffres $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.
- Après un certain rang, un groupe de chiffres se repète indéfiniment (le dévéloppement d'un nombre rationnel est périodique).
- Ce développement ne se termine jamais par $999\dots$
- Réciproquement, on peut toujours convertir un nombre ayant un développement décimal périodique sous la forme de fraction.

[Explications supplémentaires au tableau]

Exemple

$\frac{9}{7} = 1,285714\,285714\,\dots = 1,\underline{285714}$
$\frac{9}{70} = 0,1\,285714\,285714,\dots = 0,1\,\underline{285714}$
Les groupe de chiffres souligné (ou "période") se repète indéfinement.

Définition

Une relation d'ordre sur un ensemble X est une relation $\leq$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(o1) $\forall x \in X,\ x \leq x.$

(o2) $\forall x, y \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

(o3) $\forall x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Un ensemble X, muni d'une relation d'ordre $\leq$, est dit totalement ordonné lorsqu'on a aussi

(o4) $\forall x, y \in X$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

En supposant connue la relation d'ordre usuelle $\leq$ dans $\mathbb{Z}$, on **définit** facilement une relation d'ordre (compatible) $\leq$ dans $\mathbb{R}$.
[Détails au tableau]
Conclusion :

$(\mathbb{R}, \leq)$ *est un ensemble totalement ordonné.*

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est borné supérieurement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, a \in A, \quad a \leq M.$$

On dit alors que M est un majorant pour A. Si de plus $M \in A$ on dit que M est le maximum de A (ou "le plus grand élément de A") :

$$M = \max(A).$$

- Lorsqu'il existe, le maximum est unique [pourquoi ?].

Définition

On dit que A est borné inférieurement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, a \in A, \quad m \leq a.$$

On dit alors que m est un minorant pour A. Si de plus $m \in A$ on dit que m est le minimum de A (ou "le plus petit élément de A") :

$$m = \min(A).$$

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A borné supérieurement. Supposons que l'ensemble de tous les majorants de A possède un minimum $S \in \mathbb{R}$. Ce nombre S s'appelle la borne sup de A :

$$S = \sup(A) \overset{\text{déf}}{=} \min\{M \in \mathbb{R} \,|\, M \text{ majorant de } A\}.$$

Si l'ensemble A possède un maximum : $\sup(A) = \max(A)$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A borné inférieurement. Supposons que l'ensemble de tous les minorants de A possède un maximum $I \in \mathbb{R}$. Ce nombre I s'appelle la borne inf de A :

$$I = \inf(A) \overset{\text{déf}}{=} \max\{m \in \mathbb{R} \,|\, m \text{ minorant de } A\}.$$

Noter que $\sup(A)$ et $\inf(A)$, s'ils existent, sont uniques.

Théorème (admis)

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{R}$. Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et borné inférieurement possède une borne inf dans $\mathbb{R}$.

Conventions :

On écrit $\sup A = +\infty$ lorsque $A \neq \emptyset$ n'est pas borné supérieurement.
Parfois on pose $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

Question

Vrai ou faux ?

1. Tout ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{Z}$.
2. Tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{Q}$.
3. Tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{R}$.

Règle pratique pour le calcul de sup et inf

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un ensemble borné supérieurement et $S \in \mathbb{R}$. On a

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & a \leq S \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ tel que } S - \epsilon < a. \end{cases}$$

Dém. Au tableau.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un ensemble borné inférieurement et $I \in \mathbb{R}$. On a

$$I = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & I \leq a \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ tel que } a < I + \epsilon. \end{cases}$$

Somme et produit de nombres réels.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, la définition rigoureuse de

$$x + y \quad \text{et} \quad x \cdot y$$

à partir de leur écriture décimale nécessite l'utilisation de la propriété du sup. Par exemple (dans le cas de nombres réels positifs, pour simplifier) :

Si $x = m, \alpha_1\alpha_2\ldots$ et $y = n, \beta_1\beta_2\ldots$, on pose

$$x + y \overset{\text{déf}}{=} \sup\{x_k + y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}, \quad x \cdot y \overset{\text{déf}}{=} \sup\{x_k \cdot y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\},$$

où x_k et y_k sont les nombres rationnels (que l'on sait déjà sommer ou multiplier entre eux) $x_k = m, \alpha_1 \ldots \alpha_k$ et $y_k = n, \beta_1 \ldots \beta_k$

Ces opérations ont les propriétés usuelles (commutative, associatiative, etc.), justifiant les règles usuelles de calcul.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{R}$, muni des opérations $+$ et $\cdot$ et de la relation d'ordre $\leq$, a la structure de corp commutatif totalement ordonné.

[Détails au tableau].

Question

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ est-il un **corp commutatif totalement ordonné** ?
2. Et $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$?
3. Et $\mathbb{C}$ (nombres complexes) ?

Théorème ($\mathbb{R}$ est archimédien)

Pour tout $x > 0$, et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad nx > y.$$

Dém. On peut se ramener au cas $x = 1$ [pourquoi ?]. Ensuite, si $y < 0$ il suffit de prendre $n = 0$. Si $y = 0$ il suffit de prendre $n = 1$. Si $y > 0$ est de la forme $y = m, \alpha_0\alpha_1 \ldots$, il suffit de prendre $n = m + 1$. □

Théorème (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x < y$,

$$\exists\, q \in \mathbb{Q} \quad \textit{tel que} \quad x < q < y.$$

Dém. [Au tableau].

Théorème (existence des racines)

Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique solution $x \in \mathbb{R}^+$ de l'équation.

$$x^n = a.$$

Cette solution est notée $x = \sqrt[n]{a}$ ou sinon $x = a^{1/n}$.

Dém. [Admise : voir les approfondissements].

- Le théorème ci-dessus **ne permet pas** de définir $\sqrt{-7}$, ou $\sqrt[4]{-3}$, ou encore $(-\pi)^{1/2}$ (écritures à proscrire).

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier **impair** et $a \in \mathbb{R}^+$. On pose
$\sqrt[n]{-a} = (-a)^{1/n} \overset{\text{déf}}{=} -\sqrt[n]{a}$.

Définition (Valeur absolue)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et aussi $|x| \geq \pm x$.
- Si $M \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$.
- Si $M \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \geq M \iff x \leq -M$ ou $x \geq M$.
- $|x - a|$ exprime la distance entre les réels x et a.

Proposition

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \text{“\textit{inégalité triangulaire}”},$$

et

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y|.$$

Dém. [Au tableau].

Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de $y = f(x)$?

Définition (parties positives et négatives)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, 0).$$

Propriétés

- $x^+ + x^- = \ldots$??
- $x^+ - x^- = \ldots$??

Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de $y = f(x)$?

Définition (parties positives et négatives)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, 0).$$

Propriétés

- $x^+ + x^- = |x|$
- $x^+ - x^- = x$

Définition (Partie entière)

Soit $x = m, \alpha_1\alpha_2\ldots$ un nombre réel. La partie entière de x (notée $[x]$ ou $E(x)$) est définie par

$$[x] \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} m & \text{si } x \geq 0 \\ m-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, $[x]$ est **le plus grand entier $\leq x$.**

Propriétés : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $[x] \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x : $\quad [x] \leq x < [x] + 1$.

[Au tableau : graphe de $[x]$, $|x|$, x^+ et x^-].

Problème : on souhaite démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe des démonstrations par récurrence :

- **Si** $\mathcal{P}_0$ *est vraie,* *[initialisation]*
- **et si**, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, *[hérédité]*

Alors la propriété $\mathcal{P}_n$ *est vraie quel que soit* $n \in \mathbb{N}$.

Question

Comment calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de n premiers nombres impairs,

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1)\ ?$$

Définition (Factoriels et puissances)

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0! \overset{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \overset{\text{déf}}{=} (n-1)! \cdot n$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$a^0 \overset{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \overset{\text{déf}}{=} a \cdot a^{n-1}.$$

Ceci donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

et

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}.$$

Définition (Coefficient binomial)

Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On pose

$$\binom{n}{k} \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriétés [Exercice]

- En particulier, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.
- Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Théorème (formule du binôme)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dém. [Au tableau].

Corollaire (Inégalité de Bernouilli)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dém. [Au tableau].

Définition (suite)

Une suite réelle est une application

$$x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$

Notations alternatives pour les suites : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement (x_n).

On appelle aussi "suite réelle " les applications à valeur réelles dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.

Voici trois manières différentes de noter la même suite :

- La fonction $x\colon \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\} \to \mathbb{R}$ définie par $x(n) = n^2$.
- La suite $(n^2)_{n\geq 4}$.
- La suite $(16, 25, 36, \ldots)$.

Définition (limite d'une suite)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite (x_n) converge si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (appelé limite de la suite), tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, ou $x_n \to \ell$.
Une suite **non convergente** est dite divergente.

Certaines suites divergentes peuvent avoir une limite infinie :

Définition (limite infinie)

On dit que la suite (x_n) diverge à l'infini si :

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq N, \quad |x_n| \geq M.$$

On écrit dans ce cas $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, ou $x_n \to \infty$.

Question

Comment donner une sens aux écritures

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ ?}$$

Exercice

En utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, démontrer rigoureusement que

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Théorème (Unicité de la limite)

Si la limite ℓ d'une suite réelle existe (finie ou infinie), elle est unique.

Dém. [Au tableau]

Terminologie : une suite réelle (x_n) est dite

- majorée, si : $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq M$.
- bornée, si :$\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n| \leq M$.
- croissante, si :$\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq x_{n+1}$.

Ne jamais intervertir $\exists \dots$ et $\forall \dots$ Par exemple,

$$“\,\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \textit{ on a } x_n \leq M\,”$$

n'est pas la même chose que

$$“\,\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, M \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que on a } x_n \leq M\,”$$

Proposition

Toute suite réelle convergente est bornée.

Question

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad (x_n)$ non bornée.
2. (x_n) non bornée $\quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Théorème (des gendarmes)

Soient (a_n), (b_n) et (x_n) trois suites telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

et

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$$

(avec $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$).
Alors la suite (x_n) **possède une limite** *et l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

Dém. Au tableau.

Question

La suite $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$ est-elle convergente ?

Théorème (opération avec les limites)

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles **convergentes** *respectivement vers ℓ et ℓ'. Alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont convergentes et*

$$x_n + y_n \to \ell + \ell', \qquad \textit{et} \qquad x_n y_n \to \ell\ell'.$$

De plus, si $y_n \neq 0$ pour tout n :

- $\ell' \neq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$
- $\ell \neq 0,\ \ell' = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$

Question

Comment calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6} \quad ?$$

Sur la démonstration du théorème précédent

Question (autour de la définition de limite)

Soit (x_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Comparer les trois écritures suivantes :

1. $$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$
2. $$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < 2\epsilon.$$
3. $$\exists C > 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < C\epsilon.$$

Sont-elles équivalentes ?

[Dem. du théorème au tableau]

Théorème (opérations avec des limites infinies)

Soient $x_n \to \ell$ et $y_n \to \ell'$.

- *Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$, alors $x_n + y_n \to +\infty$.*
- *Si $\ell > 0$ et $\ell' = +\infty$, alors $x_n y_n \to +\infty$*
- *Si $\ell < 0$ et $\ell' = \infty$, alors $x_n y_n \to -\infty$*
- *Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = \infty$, alors $\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$*
- *Si $\ell = \ell' = +\infty$, alors $x_n + y_n \to +\infty$ et $x_n y_n \to +\infty$.*

Tous les cas ne sont pas couverts ! Par exemple :

- $x_n \to 0$ et $y_n \to \infty \implies x_n y_n \to ??$ $[0 \cdot \infty]$
- $x_n \to +\infty$ et $y_n \to -\infty \implies x_n + y_n \to ??$ $[\infty - \infty]$
- $x_n \to +\infty$ et $y_n \to +\infty \implies \dfrac{x_n}{y_n} \to ??$ $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $x_n \to 0$ et $y_n \to 0 \implies \dfrac{x_n}{y_n} \to ??$ $[\frac{0}{0}]$

Ces cas de figure sont des exemples de formes indeterminées.

Utilisation des limites pour le calculs de sup et inf.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide.

- $\sup(A) = +\infty$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to +\infty$.
- $\sup(A) = S \in \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to S$ *et* S *est un majorant pour* A.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide.

- $\inf(A) = -\infty$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to -\infty$.
- $\inf(A) = I \in \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to I$ *et* I *est un minorant pour* A.

Dém. [Au tableau]

Les suites monotones sont les suites réelles croissantes ou décroissantes.

Théorème (limites des suites monotones)

Toute suite monotone (x_n) possède une limite. Plus précisément :

- *Si (x_n) est croissante et majorée alors (x_n)* **converge** *vers $S = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*
- *Si (x_n) est croissante et non majorée alors (x_n) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*
- *Si (x_n) est décroissante et minorée alors (x_n)* **converge** *vers $I = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*
- *Si (x_n) est décroissante et non minorée alors (x_n), alors $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Dém. [Au tableau].

Proposition (suites adjacentes)

Soit (x_n) *une suite croissante et* (y_n) *une suite décroissante, telles que* $x_n \leq y_n$ *et* $y_n - x_n \to 0$. *Alors* (x_n) *et* (y_n) *convergent vers la même limite.*

Dém. [Au tableau.]

Exercice

Soient a, b deux réels, avec $a < b$. Posons

$$x_0 = \sqrt{ab}, \qquad y_0 = \frac{a+b}{2}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Démontrer que ces suites sont adjacentes. Ces suites sont alors convergentes [mais on ne sais pas en expliciter la limite !]

Définition (suite géométrique)

Une suite de la forme $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $a \in \mathbb{R}$ est dite géométrique.

Pour $a = 1$, on obtient la suite constante $(1, 1, \ldots)$.
Pour $a = -1$, la suite alternée divergente $(1, -1, 1, -1, \ldots)$.

Question

Que peut-on dire de a^n pour $n \to \infty$ dans les autres cas ?

Théorème

- $a > 1 \implies a^n \to +\infty$.
- $-1 < a < 1 \implies a^n \to 0$.
- $a < -1 \implies a^n \to \infty$.

Dém. [Au tableau.]

Sommes partielles d'une suites géométrique

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & si\ a \neq 1 \\ n+1 & si\ a = 1. \end{cases}$$

[Détails au tableau]

Exercice (série géométrique)

En fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, étudier la limite $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)$

Un critère de convergence vers 0

Lemme

Soit $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 1}{x_n} = \ell, \quad \textit{avec} \quad \ell < 1,$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Dém. [Au tableau].

Application. Deux théorèmes de comparaison

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} +\infty, & si\ a > 1 \\ 0, & si\ -1 < a < 1 \\ \infty, si\ a < -1. \end{cases}$$

Noter que la valeur de p n'affecte pas ces limites.
Le cas $a = \pm 1$ se traite facilement.
[Détails au tableau].

Le nombre e

Nous définirons plus tard $e \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(1)$, après avoir introduit la fonction ln et la fonction exp.
Signalons ici deux caractérisations remarquables de ce nombre réel e :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

et

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}.$$

- La deuxième formule permet de démontrer que e est **irrationnel** et que $e \simeq 2,718\dots$
- La première formule met en évidence qu'il y a une autre "forme indéterminée" (notée $[1^\infty]$) :

$$x_n \to 1, \quad \text{et} \quad y_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \to ??$$

[Voir les TD et les approfondissements pour plus de détails.]

Définition

Étant donnée une suite (x_n), on appelle suite extraite (ou sous-suite) de (x_n) toute suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction **strictement croissante**.

Notation alternative : les suites extraites sont notées aussi $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Cela est cohérent, car ϕ définit une suite d'entiers, la suite croissante $n_k = \phi(k)$.

Remarque. Si $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une autre fonction strictement croissante, $x_{\psi\circ\phi(n)} = x_{\psi(\phi(n))}$ sera alors une nouvelle extraction (une sous-sous-suite) de la suite de départ. Ou avec la notation alternative, $(x_{n_{k_\ell}})$.

Proposition

Si (x_n) est une suite convergente vers ℓ, alors toute suite extraite de (x_n) converge vers ℓ.

Dém. [Au tableau].

Question

Vrai ou faux ?

- Si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent, alors (x_n) converge.
- Si $x_{2n} \to \ell$ et $x_{2n+1} \to \ell$, alors $x_n \to \ell$.
- Si (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent, alors (x_n) converge.

Théorème (de Ramsey)

Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Dém. [Voir les approfondissents]

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Dém. [Au tableau]

Définition

Une suite réelle est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, m, m \geq n_0 \quad \text{on a} \quad |u_m - u_n| < \epsilon.$$

Lemme

Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème ($\mathbb{R}$ est complet)

Dans $\mathbb{R}$, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Dém. [Au tableau]

Définition

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit complet s'il a la propriété que toute suite de Cauchy (x_n) contenue dans A converge vers une limite $\ell \in A$.

Question

- $\mathbb{Q}$ est-il complet ?
- Et $\mathbb{Z}$?

Exercice (série harmonique)

Vérifier que la suite

$$S_n \overset{\text{déf}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas de Cauchy et conclure que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire des nombres de la forme :

$$z = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

On munit $\mathbb{C}$ des opérations de sommes et produit définies par

$$\forall\, z\, z' \in \mathbb{C}, \quad \text{où} \quad z = a + ib, z' = a' + ib', \quad \text{avec } a, a', b, b' \in \mathbb{R} :$$

$$z + z' \stackrel{\text{déf}}{=} (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' \stackrel{\text{déf}}{=} (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Théorème

L'ensemble $\mathbb{C}$, muni de ces opérations de somme et produit est un corp commutatif.

[Voir les cours d'algèbre pour plus de détails.]

Définition

Si $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est comme ci-dessus, on appelle a la partie réelle et b la partie imaginaire de z. Le nombre

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

s'appelle le module de z.

Proposition

Si $z \in \mathbb{C}$ est comme ci-dessus, on a $|z| \in \mathbb{R}^+$ et

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |z| \leq |a| + |b|.$$

Convergence des suites complexes

Définition

On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) **converge** vers $z \in \mathbb{C}$ (et on écrit $z_n \to z$) si et seulement si la suite des nombres réels $(|z_n - z|)$ vérifie

$$|z_n - z| \to 0.$$

Proposition

Soit (z_n) une suite de nombres complexes, avec $z_n = a_n + ib_n$, et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où a_n, a, b_n, b sont les parties réelles et imaginares de z_n et z respectivement. Alors $z_n \to z$ si et seulement si $a_n \to a$ et $b_n \to b$.

Dém. Cela découle des inégalités (exercice)

$$\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leq |z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

, et du théorème des gendarmes.

Une fonction réelle est une application $f\colon D \to A$, où $D \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$.
L'ensemble D est le domaine de définition de f.
Il convient toujours de préciser D avec la définition de f. À défaut, on prend

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ “a un sens” }\}.$$

[Exemples au tableau]

Definition

Soit $f\colon D \to A$ une fonction réelle.

- $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf}}{=} \{f(x) \in A \mid x \in D\}$ est l'image de f.
- Si $E \subset D$, on note $f(E) \overset{\text{déf}}{=} \{f(x) \in A \mid x \in E\}$ (“image de E par f”)
- Si $B \subset A$, on note $f^{-1}(B) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in D \mid f(x) \in B\}$ (“image réciproque” de B par f).
- $G_f \overset{\text{déf}}{=} \{(x, f(x)) \in D \times A \mid x \in D\}$ est le “graphe de f”.

[Exemples au tableau]

Definition (fonctions injectives, surjectives)

- $f : D \to A$ est injective dans D si $\forall\, x_1, x_2 \in D$, avec $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- $f : D \to A$ est surjective sur A si $\forall y \in A$, $\exists\, x \in D$ tel que $f(x) = y$.
- $f : D \to A$ est bijective si elle est injective dans D et surjective sur A. Dans ce cas, on peut construire la fonction réciproque de f, c'est-à-dire la fonction $f^{-1} : A \to D$, où

$$\forall\, x \in D,\ y \in A, \quad f^{-1}(y) \overset{\text{déf}}{=} x \iff f(x) = y$$

Proposition

Un point (y_0, x_0) appartient au graphe de f^{-1} si et seulement si le poit (x_0, y_0) appartient au graphe de f. Les graphes de f et f^{-1} sont alors symétriques par rapport à la bissectrice d'équation $y = x$.

Opérations sur les fonctions

- Si $f : D \to \mathbb{R}$ est $g : D \to \mathbb{R}$ on définit la "fonction somme" $f + g$ et la "fonction produit fg"

$$(f+g)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x)g(x).$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ on note λf la fonction

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- Il y a une relation d'ordre **partielle** :

$$f \leq g \iff \forall x \in D, \quad f(x) \leq g(x).$$

- Si $f : D \to A$ et $g : A \to B$, on définit la composée f et g :

$$g \circ f : D \to B, \qquad g \circ f(x) \overset{\text{déf}}{=} g\big(f(x)\big).$$

Question

L'opération $\circ$, sur l'ensemble des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle associative/commutative ?

Noter que $\forall y \in B, \quad f \circ f^{-1}(y) = y, \quad \text{et} \quad \forall x \in D, \quad f^{-1} \circ f(x) = x.$
En exprimant ceci à l'aide des "fonctions identités" :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_A, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_D$$

Ne pas confondre :

$f(x)^{-1}$ *(le réciproque du nombre réel $f(x)$), avec*
$f^{-1}(x)$ *(la fonction réciproque de f évaluée en x).*

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2x + 3$:

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{2x+3}, \qquad \text{mais} \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Pour éviter ce type de confusion, on donne des noms spéciaux à certaines fonctions réciproques importantes (comme arcsin, arctan, ln etc.).

Fonctions élémentaires

- Les fonctions affines : $f(x) = ax + b$, où $a, b \in R$
- Les fonctions puissances : $f(x) = x^m$, où $m \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions racines n-ièmes : $f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Les fonctions trigonométriques sin, cos et tan.
- Les fonctions exp et ln [sans définition pour l'instant]

[Graphes au tableau]

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. On dit que f est paire si, pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$ et impaire si $f(-x) = -f(x)$.

Définition

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + T) = f(x)$.

Intervalles

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle **non vide**, et **non réduit à un seul point** (c'est-à-dire l'un des ensembles de la forme, pour $a < b$) :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $\quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $\quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, $\quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$,
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $\quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$,
- $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.

Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorque x tend vers a par la droite, et l'on ećrit $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que : } \quad (a < x < a+\delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorque x tend vers b par la gauche), et l'on ećrit $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que : } \quad (b-\delta < x < b) \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- Si $a < x_0 < b$, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorque x tend vers x_0, et l'on ećrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que : } \quad (x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

  Autrement, dit :
  $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell.$

Remarque. Dans l'écriture $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, la valeur de $f(x_0)$ ne joue aucun rôle. Lorsqu'on a $f(x_0) = \ell$, dit que f est **continue** en x_0.

Question (limites à l'infini)

Comment définir ces écritures ?

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

Question (limites infinies)

Comment définir ces écritures ?

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

Et celles-ci ?

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

[Quelques détails au tableau].

Lien avec la limite des suites

Théorème

Une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite ℓ (avec $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = \pm\infty$) en c (avec $c \in \mathbb{R}$, ou $c = \pm\infty$) si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset I$ telle que ($x_n \to c$ et $\forall\, n\; x_n \neq c$), on a $f(x_n) \to \ell$.

Dém. [Au tableau]

Question

Que peut-on dire des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$?

Conséquences du théorème précédent

Théorème (Unicité de la limite d'une fonction)

Théorème (théorème des gendarmes)

Théorème (somme/produit/quotient de limites de fonctions)

Théorème (Limite des fonctions monotones)

Exercice

En s'inspirant des résultats pour les limites des suites, énoncer ces 4 théorèmes. Les démontrer via le théorème de la diapositive précédente.

Exercice

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{[x]}$.

Voici d'autres propriétés utiles des limites

Proposition (passage à la limite dans une inégalité)

Soient $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$f \leq g \qquad \ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \ell' = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x)$$

(avec ℓ et ℓ' réels ou $\pm\infty$). Alors

$$\ell \leq \ell'.$$

Dém. [Au tableau]

Théorème (limite de la fonction composée.)

Soient I et J deux intervalles, et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) = \ell, \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\substack{y \to \ell \\ y \in J}} g(y) = L$$

avec ℓ et L réels ou éventuellement $\pm\infty$ (et vérifiant de plus $\forall x \in I,\ f(x) \neq \ell$: mais cette condition est inutile si g est continue en ℓ). Alors,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} g \circ f(x) = L$$

Dém. [Au tableau]

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} + 2} = \lim_{y \to 2} \frac{y+1}{y+2} = \frac{3}{4}.$$

Notion d'équivalent

Définition

On dit que deux fonctions réelles f et g sont équivalentes en x_0, et on écrit $f \sim_{x_0} g$ si l'on peut écrire $f(x) = g(x)(1 + r(x))$, où $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$.

Remarque Dans le cas où g ne s'annule pas près de x_0, on a

$$f \sim_{x_0} g \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Quelques équivalents remarquables

$$\sin(x) \sim_0 x, \qquad \cos(x) - 1 \sim_0 -\tfrac{x^2}{2}, \qquad \tan(x) \sim_0 x$$
$$\exp(x) - 1 \sim_0 x, \qquad \ln(1+x) \sim_0 x$$

[Démonstration dans le chapitre suivant]

Utilisation des équivalents

- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$: $f \sim_{x_0} \ell \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ("$\Leftarrow$" **fausse** si $\ell = 0$).
- On peut multiplier et faire le quotient d'équivalents.
- On **ne peut pas sommer ou composer** les équivalents.

[Démonstration au tableau pour le produit.
Contrexemple pour la somme : $f(x) = x + x^3$, $g(x) = -x + x^2$.
Contrexemple pour la composition $g(x) = \exp(x) \not\sim_{+\infty} \exp(x+1)$.]

L'exponentiel et le logarithme

Même si les fonctions exponentielles et logarithme seront définies plus loin, on s'autorisera à utiliser dans les exercices, dès maintenant, les propriétés suivantes :

- $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement positive et strictement croissante
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{-a} = 1/e^a$.

Les notations e^x et $\exp(x)$ sont équivalentes.

- $\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, strictement croissante.
- $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\forall\, a, b > 0, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(1/a) = -\ln(a)$.

Les deux fonctions $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ et $\ln\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont bijectives et sont **l'une la fontion réciproque de l'autre**

Croissances comparées

Proposition

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^a} = 0$$

et

$$\forall\, a > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln(x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^a \ln(x) = 0.$$

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Définition (fonction continue)

- On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si $\forall x \in I$, f est continue en x_0.

Autrement dit : *f continue en x_0 si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \big(x \in I,\ \text{et } |x - x_0| < \delta\big) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Ou encore, si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Théorème (continuité de la somme/produit/quotient/composée)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en $x_0 \in I$, alors les fonctions $f + g$, fg et λf sont continues en x_0. La composée de deux fonctions continues est continue.

Dém. Exercice (utiliser le théorème correspondant sur les limites).

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $\ell \in I$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I convergente vers ℓ. Alors $f(x_n) \to f(\ell)$ pour $n \to +\infty$.

Exemples de fonctions continues

- Les fonctions polynômes, la fonction $|\cdot|$ (continues sur $\mathbb{R}$)
- Les fonctions rationnelles (continues sur les intervalles où le dénominateur ne s'annule pas).
- Les fonctions racines : $\sqrt[n]{\cdot}$ (continues sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair et sur $\mathbb{R}$ si n est impair. Admis pour l'instant).
- Les fonctions sin et cos (continues sur $\mathbb{R}$)
- La fonction exp (continue sur $\mathbb{R}$. Admis pour l'instant.)
- La fonction ln (continue sur $]0, \infty[$. Admis pour l'instant.)

[Détails au tableau]

Quelques fonctions discontinues

- La fonction $E(\cdot)$ (disc. sur les entiers).
- La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ (disc. en 0 , pour tout $c \in \mathbb{R}$).
- La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ (disc. en 0 pour tout $c \in \mathbb{R}$).
- La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0, \end{cases}$ (disc. en 0 lorsque $c \neq 1$).
- La fonction de Dirichlet : $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$, (disc. en tout point de $\mathbb{R}$).

[Détails au tableau]

Théorème (de Weierstrass)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes, c'est-à-dire que :

$$\exists c \in [a, b] \quad \textit{tel que } f(c) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

et

$$\exists c' \in [a, b] \quad \textit{tel que } f(c') = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

- On dit que c est le **point de maximum absolu** pour f dans $[a, b]$ et que $f(c)$ est **le maximum absolu** de f dans $[a, b]$.

Dém. [Voir les approfondissements]

Corollaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Alors f possède un point de minimum absolu dans $\mathbb{R}$.

Dém. [Au tableau]

Rappelons que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties J de $\mathbb{R}$ caractérisées par la propriété suivante :

$$x, y \in J, \quad x < c < y \quad \Rightarrow \qquad c \in J.$$

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.
Autrement dit : Si f prend dans I les valeurs α et β, alors f prend toutes les valeurs comprises entre α et β.

Dém. [Voir les approfondissements] **Exemple d'application :** Toute

équation de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (où $a \neq 0$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$ possède au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (Continuité de la fonction inverse)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective dans I. On pose $J = f(I)$. Alors,

- *f est strictement monotone dans I.*
- *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, et continue dans J.*

Dém. [Voir approfondissements]

Exemple d'application : la continuité des fonctions racines : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (si n est pair) ou sur $\mathbb{R}$ (si n est impair).

Définition (fonctions circulaires inverses)

- La fonction arcsin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la réciproque de la fonction sin : $[-\pi,\pi] \to [-1,1]$
- La fonction arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ est la réciproque de la fonction cos : $[0,\pi] \to [-1,1]$.
- La fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la fonction réciproque de la fonction tan : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

[Dessins au tableau].

Ces fonctions sont continues sur leur ensemble de définition.

Motivation géométrique

Rappelons que $y = mx + b$ est l'équation d'une droite de pente (ou coefficient directeur) m, passant par b en $x = 0$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.

La droite d'équation

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

est la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ *et* $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ *du graphe de la fonction* f.

Intuitivement, en calculant la limite pour $h \to 0$ on obtiendra l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle d'extrémités $a < b$.

Définition

- On dit que f est dérivable à droite au point a s'il existe **finie** la limite (notée $f'(a^+)$ et appelée dérivée à droite de f en a),

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(a+h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable à gauche au point b s'il existe **finie** la limite (notée $f'(b^-)$ dérivée à gauche de f en b),

$$f'(b^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(b+h) - f(a)}{h}.$$

- Si $a < x_0 < b$, on dit que f est dérivable en x_0 si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les dérivées à gauche et à droite coïncident :

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple

- La dérivée d'une fonction constante est nulle.
- La fonction $f(x) = |x|$, en $x_0 = 0$ est dérivable à droite et à gauche. On a $f'(0^+) = 1$ et $f'(0^-) = -1$, mais f n'est pas dérivable en 0.
- La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en x_0, pour tout $x_0 > 0$, avec $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle d'extrémités $a < b$ et $a < x_0 < b$ une fonction dérivable en x_0.

Définition (Droite tangente)

La droite tangente au graphe de la fonction f au point x_0 est la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La dérivée $f'(x_0)$ est donc le **coefficient directeur** de la droite tangente au graphe de la fonction au point $(x_0, f(x_0))$.

Définition

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point de I, on peut définir une nouvelle fonction, appellée fonction dérivée de f, notée f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, telle que $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Interpretation cinématique

Considérons un point P qui se deplace le long d'une droite sur l'axe x, occupant à l'instant t la position $p = p(t) \in \mathbb{R}$. La vitesse moyenne de P dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + h]$ est $\frac{p(t_0+h)-p(t_0)}{h}$. La **vitesse instantanée** $v(t_0)$ de P à l'instant t_0 est définie, et se calcule, en prenant la limite $h \to 0$. On a alors

$$v(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t).$$

Notations alternatives

$$p'(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{p}(t) = p_t(t).$$

Définition (Notation de Landau : "petit-o")

Si f et g sont deux fonctions définies dans un intervalle contenant x_0, dit que f est négligeable devant $g(x)$, et l'on écrit

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{pour } x \to x_0 \iff \begin{array}{l} \exists\, \epsilon(x) \quad \text{telle que } \displaystyle\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0 \text{ et,} \\ f(x) = g(x)\epsilon(x) \end{array}$$

- $f(x) = o(1)$ pour $x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- $x^2 = o(x)$ pour $x \to 0$. D'autre part $x = o(x^2)$ pour $x \to +\infty$.
- Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = o(g_2(x))$ alors $f_1 f_2(x) = o(g_1 g_2(x))$, pour $x \to x_0$.
- $(f_1 + f_2)(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_1(x))$, si $g_2(x) = o(g_1(x))$ ou $g_1(x) \sim g_2(x)$pour $x \to x_0$
  $(f_1 + f_2)(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_2(x))$, si $g_1(x) = o(g_2(x))$ ou $g_1(x) \sim g_2(x)$pour $x \to x_0$
- On a **pas le droit** soustraire/simplifier les $o(\dots)$.

Proposition

f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h), \qquad \text{pour } h \to 0.$$

Dans ce cas, on a $m = f'(x_0)$.

On déduit de cette proposition que :

f dérivable en $x_0 \quad \Rightarrow \quad f$ continue en x_0.

Exemples de fonctions dérivables

Les fonctions suivantes sont dérivables dans leur ensemble de définition.

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nf(x)^{n-1}$.
- Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
- Si $f(x) = \exp(x)$, alors $f'(x) = \exp(x)$
- Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$.

[**Dém.** Admis pour exp et ln. Au tableau les autres.
En particulier, on démontre ici géométriquement les limites remarquables en 0, $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$.]

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Alors $f+g$ et fg sont dérivables en x. Si $g(x) \neq 0$, f/g est dérivable en x. De plus, on a les formules :

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

[**Dém.** Au tableau]

Exemple

- La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale.
- Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$. Cette formule, déjà rencontrée pour $n \in \mathbb{N}$, reste vraie si $n \in \mathbb{Z}$.
- Si $f(x) = \tan(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$, pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème (Dérivée de la fonction composée)

Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0, et on a la formule

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Exemple

$f(x) = (\sin x)^{10} \;\Rightarrow\; f'(x) = 10(\sin x)^9 \cos x.$

Théorème (Dérivée de la fonction inverse)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective, dérivable en $x_0 \in I$, avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$, et l'on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Applications

- Si $a = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = x^a$, on a $f'(x) = ax^{a-1}$, pour $x > 0$. En particulier (si $a = 1/2$), si $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.
- La fonction arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est dérivable en $]-1, 1[$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est dérivable en $]-1, 1[$ et $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Définition

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que x_0 est un point de minimum local pour f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0) = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$. On dit que x_0 est un point de maximum local pour f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0) = \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$.

Proposition

Soit $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$ un extremum local (c'est-à-dire un minimum ou un maximum local) de la fonction f, alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème (de Rolle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème (de Cauchy)

Soient f et g deux fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$ et dérivables dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Dém. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$x \mapsto (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Le cas particulier $g(x) = x$ du théroème de Cauchy donne le résultat fondamental suivant :

Théorème (des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Applications

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus on obtient une inégalité très importante :

Inégalité des accroissments finis

$$|f(b)-f(a)| \leq \left(\sup_{c\in]a,b[} |f'(c)|\right)|b-a|.$$

Et voici une autre application du théorème des accroissements finis.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I.

- *La fonction f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ dans I. Elle est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$ dans I.*
- *Si $f' > 0$ dans I alors f est strictement croissante dans I. Si $f' < 0$ dans I alors f est strictement décroissante.*

Le théorème suivant est un outil très pratique dans le calcul des limites se présentant sous la forme indeterminée $[\frac{0}{0}]$.

Théorème (de l'Hospital)

Soit $a \in I$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I \backslash \{a\}$, telles que $f(a) = g(a) = 0$ et g, g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$. On suppose en outre que f'/g' a une limite ℓ (finie ou infinie) en x_0. Alors,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Dém. Considérer une suite $x_n \to a^+$, ensuite une suite $x_n \to a-$ et appliquer le théorème de Cauchy. (Plus de détails au tableau).

Variantes du théorème de l'Hospital

- En imposant des conditions convenables sur f et g, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- La formule de l'Hospital s'applique aussi aux limite sous la forme indeteminée $[\infty/\infty]$.

Comment tracer le graphe d'une fonction ?

1. Reconnaitre si la fonction est paire, impaire ou périodique, ou si elle présente d'autres symétries évidentes.
2. Déterminer le domaine de définition D de la fonction.
3. Étudier le signe de f et si possible en trouver les zéros.
4. Étudier les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers les bords du domaine D. Si D est non borné, étudier les limites pour $x \to \pm\infty$ et chercher les éventuels asymptotes en $\pm\infty$[1].
5. Trouver les éventuels points de discontinuité de f. Calculer f'. Trouver les éventuels points de non dérivabilité et étudier la limite de f' en ces points.
6. Chercher à résoudre dans D les inégalités $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$. En déduire le tableau des variations des la fonction f, c'est à dire les intervalles où f est croissante et décroissante.
7. Déduire du tableau des variations les point d'extrema locaux de f. Si possible calculer la valeur de f en ces points.
8. Tracer le graphe en prenant en compte **tous** ces éléments.

1. On dit qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote pour la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0$. Noter que les formules $a = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ et $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$ permettent de trouver l'équation de l'asymptote

Exemple

Étudier et tracer le graphe de la fonction $f(x) = \frac{(x-a)^{2/3}}{x}$, où $a > 0$ est un paramètre.

Exemple

Toute fonction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0},$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_{n-1} \neq 0$, (n entier ≥ 2) possède des asymptotes en $\pm\infty$, d'équation

$$y = \frac{a_n}{b_{n-1}} x + \frac{b_{n-1} a_{n-1} - a_n b_{n-2}}{b_{n-1}^2}.$$

Notion de primitive

Définition

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle. Toute fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$ s'appelle primitive de f.

Théorème

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Alors f admet une primitive. De plus, si F est une primitive de f sur I alors G est une autre primitive sur I s et seulement si $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est constante.

Dém. Voir le cours d'Analyse II : il s'agira de définir $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ où a est un point arbitrairement choisi de I.

Remarque. La fonction discontinue de Heaviside, $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Le logarithme naturel

Définition (logarithme naturel ou néperien)

La fonction $\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est définie comme l'unique primitive sur l'intervalle de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en $x = 1$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{pour } x > 0, \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

À partir de cette définition, on trouve facilement les propriétś suivantes

1. $\ln$ est croissante sur $]0,\infty[$.
2. $\forall x, y > 0$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$, $\frac{1}{n}\ln(x) = \ln(\sqrt[n]{x})$.
4. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
5. $\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective.

Notation ambigue : pour les mathématiciens, $\log(x) \overset{\text{déf}}{=} \ln(x)$. Pour les autres (et sur les calculatrices) $\log(x) \overset{\text{déf}}{=} \ln(x)/\ln(10)$, ce qui correspond au logarithme en base 10 de x.

La fonction exponentielle

Définition

La fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$:

$$\forall x > 0, \quad \exp(\ln(x)) = x, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

Notation. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x = \exp(x)$.

Voici les conséquences immédiates de cette définition

1. $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est bijective. De plus, $\exp(0) = 1$.
2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} = 0$.
3. $\exp$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{x-y} = e^x/e^y$, $e^{nx} = (e^x)^n$.

Définition

On définit le nombre $e = \exp(1)$.

On obtient ainsi un nombre irrationnel, qui vaut environ $2,718\ldots$ (voir cours d'Analyse II). On peut démontrer que $e = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Puissance réelle d'un réel positif

Définition

Si $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\alpha \ln(x)}.$$

Cette définition est compatible avec la définition usuelle de puissance lorsque $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. On observera qu'alors $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$ et $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$. On remarque la formule :

$$f(x) = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En particulier la fonction x^α est croissante. On vérifie immédiatement que $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. En appliquant des variantes du théorème de l'Hospital on obtient les **résultats de croissance comparée**.

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe dans I si sont pour tout $x_0 < x_1$ dans I, le graphe de la fonction dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ reste en dessous du ségment d'extrémités $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. Autrement dit :

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

On dit que f est concave dans I si $-f$ est convexe dans I.

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ est convexe dans $\mathbb{R}^+$ et elle est concave dans $\mathbb{R}^-$. L'origine est une point d'inflexion pour f (on point où la fonction change de concavité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que la fonction dérivée f' est elle même dérivable dans I. La dérivée de la fonction f' s'appelle dérivée seconde de f elle est notée f''. On définit de la même manière les dérivées d'ordre plus élévé, f''', etc.

Le théorème principal sur les fonctions convexe est le suivant :

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans I. Alors :

- *f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de chacune de ses droites tangentes.*
- *f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.*
- *f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde $f'' \geq 0$ (sous l'hypothèse supplémentaire que f est deux fois dérivable dans I.*

Dém. [Admise]

La notion de convexité joue un rôle important in optimisation. Par exemple, on peut démontrer que si x_0 est un point interne à l'intervalle I vérifiant $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un **minimum local**. Si de plus $f'' > 0$ dans I, alors x_0 est un point de **minimum global** sur I.

Introduction

Une équation différentielle (ED) d'ordre 1 est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle), que l'on cherche à trouver à partir d'une relation donnée entre f et sa dérivée f', de la forme

$$\Phi(x, f(x), f'(x)) = 0, \qquad x \in I, \tag{ED}$$

où $\Phi = \Phi(x, u, v)$ est une fonction donnée de trois variables.
Dans ce cours nous verrons comment résoudre des équations différentielles de la forme suivante :

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \qquad x \in I \tag{NH}$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions **continues** sur I données, et f est la fonction inconnue.
Cela correspond dans (ED) au choix $\Phi(x, u, v) = v + a(x)u - b(x)$. En particulier, l'application $(u, v) \mapsto \Phi(x, u, v)$ est linéaire pour tout x. C'est pourquoi on dit que (NH) est une équation différentielle **linéaire** d'ordre 1 (non-homogène).

Un exemple d'une ED non-linéaire serait par exemple $f'(x) + f(x)^3 = x$, ou encore $\sin(f'(x))f(x) = 1$: dans le premier cas $\Phi(x, u, v) = u^3 + v - x$ et dans le second $\Phi(x, u, v) = -1 + u\sin(v)$. Ce ne sont pas des applications linéaires en (u, v). On ne sait pas rsoudre en général des ED non-linéaires.

Commençons par traiter un cas particulier simple de (NH), celui des équations dites **homogènes**, c'est-à dire de la forme

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0, \qquad x \in I. \tag{H}$$

Théorème

Soit $a\colon I \to \mathbb{R}$ une fonctions continue. Les solutions $f : I \to \mathbb{R}$ de l'equation différentielle (H) sont toutes de la forme $f(x) = \lambda \exp(-A(x))$ où A est une primitive de a et λ une constante rélle.

Dém. Au tableau.

Bien souvent, dans les équations différentielles la variable x s'interprète comme un temps, et on a en général une information supplémentaire sur f, de la forme$f(x_0) = y_0$. Autrement dit, on suppose connue qu' *"à l'instant x_0 f vaut y_0"*. On appelle cet information une **condition initiale**.

Exemple (datation par le carbone 14)

Une matière radioactive perd dans l'unité de temps une proportion constante ($= a$) de sa masse : $\Delta M = -aM\Delta t$. La masse vérifie alors l'ED $M'(t) = -aM(t)$. La proportion de masse radioactive restante après un temps t est donc $M(t)/M(0) = e^{-at}$.

Dans le cas du carbone 14, on sait que $M(t)/M(0) = 1/2$ après 5500 années (ceci permet de calculer le paramètre a) et ensuite de dater des ossements en mesurant la quantité de carbone 14 restante $M(t)$ par la formule $t = \frac{1}{a}\ln(M(0)/M(t))$.

Résolution des équations différentielles de la forme (NH)

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \qquad x \in I \tag{*}$$

Théorème

- *Soit g une solution de (NH). Alors les fonctions f de la forme $f(x) = g(x) + \lambda \exp(-A(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont aussi solution de (NH), et il n'y en a pas d'autres.*
- *Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une et une seule solution $f(x)$ de l'équation (NH) vérifiant de plus la condition $f(x_0) = y_0$.*

On exprime la première partie du théorème en disant que la solution générale de (NH) est egale à la solution générale de (H) plus une solution particulière de (NH).

Dém. Au tableau.

La méthode de variation de la constante

Cette méthode permet de construire une fonction $g(x)$ solution particulière de l'équation (NH). La méthode consiste à chercher $g(x)$ parmi les fonctions de la forme

$$g(x) = \lambda(x)\exp(-A(x)),$$

où $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ est à déterminer. Un petit calcul montre que $\lambda(x)$ vérifie :

$$\lambda'(x) = b(x)\exp(A(x)).$$

Il suffit alors de *calculer d'une primitive* de $b(x)\exp(A(x))$, ce qui est toujours possible si $b(x)$ est continue sur I.

Comment trouver une primitive d'une fonction ?

On a vu que la résolution d'équations différentielles de la forme (NH) se réduit au calcul d'une primitive $A(x)$ de $a(x)$ et ensuite d'une primitive de la fonction $b(x)\exp(A(x))$.
Pour trouver une primitive d'une fonction $f(x)$ dans la pratique on peut :

- Si la fonction f est dans le tableau ci-dessous, alors une primitive F est à connaitre par coeur :

$f(x)$	$F(x)$
x^a	$x^{a+1}/(a+1), \quad a \neq -1$
$1/x$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\phi'(x)g(\phi(x))$	$G(\phi(x))$, où G primitive de g

Comment trouver une primitive d'une fonction ? [suite]

- Ou sinon, en cherchant des primitives $F(x)$ de la même forme que la fonction $f(x)$: cela marche bien lorsque $f(x) = P(x)\exp(cx)$, ou $f(x) = P(x)(a\sin(x) + b\cos(x))$, avec $P(x)$ polynômiale.
- Ou en appliquant des techniques telles que l'intégration par parties ou l'intégration par changement de variable (voir cours d'Analyse II).

Exemple

Trouver l'unique solution $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du système suivant (dit "problème de Cauchy") :

$$\begin{cases} f'(x) + 4f(x) = x^2 + 1 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Équations pouvant se ramener à la forme (NH)

Pour résoudre les équations de la forme

$$\alpha(x)f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \qquad x \in I$$

on divisee par $\alpha(x)$ et on se ramène à une équation de type $(*)$. Cependant, si $\alpha(x)$ s'annule en I ceci exige de découper I en plusieurs intervalles où $\alpha(x)$ ne s'annule pas, et d'étudier séparément l'équation $f'(x) + \frac{a(x)}{\alpha(x)}f(x) = \frac{b(x)}{\alpha(x)}$ en ces sous-intervalles. Ensuite il s'agit d'étudier les raccordements de ces solutions.

Équations à variables séparables

Ce sont les équations différentielles (d'inconnue $f = f(x)$) pouvant se ramener aux équations de la forme

$$f'(x)g(f(x)) = h(x), \qquad x \in I. \tag{ϖ}$$

Si G est une primitive de g et H est une primitive de h, alors on a $G(f(x)) = H(x) + c$, où c est une constante. Cette relation peut être utilisée pour calculer $f(x)$.

Exemple

Un TGV de 400 tonnes est équipé d'un moteur de 8 MeW. Initialement à l'arrêt, le train accelère avec pleine puissance. Quelle sera sa vitesse après 10 secondes, si l'on néglige les forces de friction ?

Réponse. On note $x(t)$ la distance parcourue à l'instant t, $v(t) = x'(t)$ la vitesse, $f(t) = mx''(t)$ la force exercée par le moteur (loi de Newton), où $m = 400 \cdot 10^3$ Kg est la masse. La puissance (supposée ici constante) est donnée par la relation $P(t) = f(t)v(t) = P_0 = 8 \cdot 10^6 W$. On a $mv'(t)v(t) = P_0$, qui est une équation différentielle à variables séparables, d'inconnue $v = v(t)$. De plus v vérifie la condition initiale $v(0) = 0$. Ainsi, $v(t) = \sqrt{2P_0 t/m}$. Après $t = 10$ secondes, on a $v = 20$ metres/seconde ($= 72$ Km/h).