1. (5 pts) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Solution. *Montrons cette proposition par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.*

Initialisation : on a $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}, \text{ et l'égalité est ainsi vérifiée pour } n+1.\end{aligned}$$

On a donc montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2.

(a) (2 pts) Calculer le PGCD de 180 et 57.

Solution. *Algorithme d'Euclide :*

$$\begin{aligned}180 &= 57 \times 3 + 9 \\ 57 &= 9 \times 6 + 3 \\ 9 &= 3 \times 3.\end{aligned}$$

On a donc $PGCD(180, 57) = 3$.

(b) (3 pts) Donner une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$180x + 57y = 12.$$

Solution. *D'après ce qui précède, on a :*

$$3 = 57 - 9 \times 6 = 57 - (180 - 57 \times 3) \times 6 = 180 \times (-6) + 57 \times 19.$$

On multiplie cette équation par 4 et on obtient $12 = 180 \times (-24) + 57 \times 76$.

Ainsi, $(-24, 76)$ est une solution particulière de $180x + 57y = 12$.

3. (Bonus) Soient a, b et c trois entiers. Montrer que si a et c sont premiers entre-eux, et b et c sont premiers entre-eux, alors ab et c sont premiers entre-eux.

Solution 1. *Montrons la contraposée : supposons que ab et c ne sont pas premiers entre-eux. Alors, il existe un nombre premier p qui divise ab et c. Le lemme d'Euclide entraîne que p divise a ou p divise b, et donc que a et c ne sont pas premiers entre-eux ou que b et c ne sont pas premiers entre-eux, ce qu'il fallait montrer.*

Solution 2. *Supposons que a et c sont premiers entre-eux, et b et c sont premiers entre-eux. Alors, il existe des entiers relatifs u, v, u' et v' tels que $au + cv = 1$ et $bu' + cv' = 1$ (identités de Bézout). Ainsi,*

$$1 = (au + cv)(bu' + cv') = (ab)(uu') + c(auv' + vbu' + cvv')$$

et par le théorème de Bézout, ab et c sont premiers entre-eux.