

## TD/TP 6 - Seconde partie

### Calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice

---

### I Déterminant

- Q.1)** - Expliquer comment est modifié le déterminant lors d'une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice.
- Q.2)** - En déduire un algorithme utilisant la méthode du pivot de Gauss pour calculer le déterminant.
- Q.3)** - Quelle est la complexité de cette algorithme ?

### II Inversion d'une matrice

Une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  consiste à résoudre le système

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ c'est-à-dire à calculer une matrice } B \text{ tel que ce système soit équivalent à}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}. \text{ On a alors } A^{-1} = B.$$

Pour cela, on considère le système sous la forme

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = I_n \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité de } GL_n(\mathbb{R})$$

- Q.1)** - Remarquer qu'une opération élémentaire sur les lignes du système consiste à faire conjointement cette opération élémentaire sur les matrices  $A$  et  $I_n$ .
- Q.2)** - Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que le système

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ est équivalent à un système de la forme}$$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ que l'on déterminera.}$$

**Q.3)** - Quel algorithme avez-vous utilisé ? Quelle est sa complexité ?

**Q.4)** - Transformer maintenant le système obtenu en un système équivalent de la forme

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_{11} & b''_{12} & b''_{13} \\ b''_{21} & b''_{22} & b''_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

**Q.5)** - Terminer par un système équivalent de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

**Q.6)** - Conclure.

**Q.7)** - Quelle est la complexité de cet algorithme d'inversion ?

### III EN TP

Le but de ce TP est d'implémenter les calculs du déterminant et de l'inverse d'une matrice.

**Q.1)** - Compléter la classe **Matrice** par une méthode retournant le déterminant. Si la matrice n'est pas carrée, cette méthode générera une exception.

**Q.2)** - Écrire une méthode statique qui retourne la matrice identité de taille  $n$  donnée en argument.

**Q.3)** - Écrire une méthode qui retourne l'inverse de la matrice. Cette méthode générera une exception si la matrice n'est pas carrée ou si la matrice n'est pas inversible.

### IV Facultatif

**Q.1)** - Vérifier que la solution d'un système de Cramer à coefficients entiers est à valeurs rationnelles.

**Q.2)** - Écrire une classe **MatriceRationnelle** qui donne les solutions exactes d'un système de Cramer à coefficients entiers et qui calcule de manière exacte l'inverse d'une matrice à coefficients rationnels.