# Feuille d'exercices VIII.

**Exercice 1.** Soit $D$ le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ .

**Exercice 2.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$ .

**Exercice 3.** Soient $0 < a < b, 0 < c < d$, et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon ax^2 < y < bx^2, c < xy < d\}$. Calculer l'aire de $D$.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

**Exercice 4.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy.$
(Indication : poser $x = u^2v$ et $y = uv^2$)

**Exercice 5.** Soit $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = ]0,R[^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\,dt.$$

**Exercice 6.** Justifier que l'intégrale $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$, où $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$ est convergente et donner sa valeur.

**Exercice 7.** Soit $\psi : U = ]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

1. Représenter graphiquement le point $p = \psi(r,\theta,\varphi)$ pour un triplet $(r,\theta,\varphi)$ fixé. On appelle $(r,\theta,\varphi)$ les coordonnées sphériques du point $p$.
2. Déterminer $\psi(U)$.
3. Montrer que $\psi$ est injective.
4. Calculer $J_\psi(r,\theta,\varphi)$ pour tout $(r,\theta,\varphi) \in U$ et en déduire que $\psi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $U$ sur $\psi(U)$.
5. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume d'une sphère de rayon $R$.

**Exercice 8.** À l'aide du changement de variables ($x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uw}, z = \sqrt{uv}$, calculer la mesure de lebesgue des domaines suivants :
– $D_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u,v,w > 0$ et $uv, uw, vw < 1\}$,
– $D_2 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u,v,w > 0$ et $uv + uw + vw < 1\}$.

**Exercice 9.** Étant donné un entier $n \geq 1$, on note $V_n$ la mesure de Lebesgue de la boule unité ouverte $B_n$ de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$B_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}\ .$$

1. Donner les valeurs de $V_1$ et $V_2$.
2. Soit $n \geq 3$. A l'aide du théorème de Fubini, montrer que

$$V_n = \left( \int_{B_2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{(n-2)/2} \, dx_1 dx_2 \right) V_{n-2} \ .$$

3. En utilisant les coordonnées polaires, prouver que $V_n = \dfrac{2\pi}{n} V_{n-2}$ pour $n \geq 3$.
4. Quelle est la limite de $V_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?