Feuille d'exercices VII.

Exercice 1. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 2. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que $\mu(A) = \text{card}(A)$ si A est fini, et $+\infty$ si A est infini). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 1$ si $x = y$ et $f(x, y) = 0$ sinon. Montrer que f est borélienne, et calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$ et $\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$.

Exercice 3. On considère une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Dire si les parties suivantes sont mesurables (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) et, si oui, calculer leur mesure :

$$A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : f(x) = y\} \ ; \quad B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : f(x) \leq y\} \ .$$

Exercice 4. Soit $D = [0, 1]^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x + y + 1)^2}$.

Exercice 5. On note D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$. Calculer $I = \displaystyle\iint_D (x - y) dx dy$.

Exercice 6. En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x} \sin(2xy) dy dx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Exercice 7.
1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$ est bien définie et que $I = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{dxdy}{(1 + y)(1 + x^2 y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x^2}$ que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Exercice 8. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\, dx$ et par $g(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx}\, dx$, respectivement.

1. Pour $t > 0$, calculer $g(t)$ en partant de l'égalité $\dfrac{\sin(x)}{x} = \displaystyle\int_0^1 \cos(xy) dy$.
2. Pour $t > 0$, calculer $f(t)$ en partant de l'égalité $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x} dy$.
3. On a vu (exercice 5 feuille VI) que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 9. Pour $y > 0$, on considère la fonction f_y définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_y(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$.

1. Montrer que chaque $y > 0$, la fonction f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.