Feuille d'exercices VI.

Exercice 1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 2.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right) dx = \ln(2)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 3. Soit $a<-1$. Calculer $\displaystyle\varphi(a) = \int_0^1 \frac{dt}{1+at}$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{tdt}{(1+at)^2}$.

Exercice 4. Pour $x \geq 0$, on pose $\displaystyle F(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$ et $\displaystyle G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$.

1. (a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer $F'(x)+G'(x)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle I = \int_0^{\infty} \exp(-t^2)\,dt$ puis de $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,dt$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\displaystyle f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 6.

1. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $t>0$ on a $\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.
   (c) En déduire que $x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
   (d) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.
2. A l'aide du résultat de l'exercice précédent, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
3. On considère la fonction $\displaystyle F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$.

1. Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.