Feuille d'exercices IV.

Exercice 1. On rappelle que la *mesure de Dirac* en un certain $a \in \mathbb{R}$, notée μ_a, est définie par :

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_a = f(a)$. (On expliquera rapidement pourquoi l'intégrale de f a toujours un sens ici.)

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \colon X \to [0, +\infty]$ une fonction intégrable. Montrer que $Y = \{x \colon f(x) \neq 0\}$ est mesurable et de mesure σ-finie (on rappelle que cela signifie que Y est une réunion dénombrable de sous-ensembles mesurables et de mesure finie).

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de dénombrement μ. On rappelle que μ est définie par $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. On se donne une application $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que u est positive et mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, l'application $u_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ définie par
$$u_k(n) = \begin{cases} u(n) & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases} .$$
Montrer que (u_k) est une suite de fonctions étagées croissant vers u.
3. Calculer $\int_{\mathbb{N}} u_k d\mu$, en déduire $\int_{\mathbb{N}} u d\mu$.
4. Soit $(v_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, le terme $v_{k,n}$ soit positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_{k,n})$ croisse vers v_n. Montrer que
$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$
5. En déduire que, si une suite $(w_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ est telle que $w_{n,m}$ soit positif pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ alors on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} w_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n,m}$$
(C'est-à-dire qu'on peut sommer d'abord par rapport à m puis par rapport à n, ou bien d'abord par rapport à n puis par rapport à m, et obtenir le même résultat dans les deux cas)

Exercice 4. Soit E un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et d'une mesure μ sur $\mathcal{A}$. On considère une application $f \colon E \to [0, +\infty]$ positive, mesurable et telle que $\int_E f d\mu < +\infty$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon .$$

Indication : on commencera par traiter le cas d'une fonction f bornée. Dans le cas général, on pourra introduire $A_n = \{x \in E \colon f(x) > n\}$.