2014/2015 **Semestre d'automne**
Université Lyon I **MASS 51**

Feuille d'exercices III : mesures, fonctions mesurables.

Exercice 1.
1. Rappeler les définitions des mesures de comptage et de Dirac vues en cours.
2. Vérifier qu'elles satisfont les axiomes des mesures.

Exercice 2. Dans cet exercice on munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ.
1. Calculer $\lambda(\mathbb{Q})$ et $\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q})$.
2. Soit $A = \bigcup [n, n + \frac{1}{2^n}[$. Calculer $\lambda(A)$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et A, B deux parties de X. Montrer que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définit ν de la manière suivante :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \nu(A) = \sup\{\mu(B) \colon B \subseteq A \text{ et } \mu(B) < +\infty\} \ .$$

1. Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
2. Montrer que $\nu = \mu$ dans le cas où μ est σ-finie.

Exercice 5. Pour A une partie de $\mathbb{R}$ on pose $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, et $\mu(A) = +\infty$ si A n'est pas dénombrable.
1. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$. Décrire la σ-algèbre $\mathcal{S}$ engendrée par $\mathcal{F}$. Montrer que la mesure nulle coïncide avec μ sur $\mathcal{F}$ mais pas sur $\mathcal{S}$.

Exercice 6 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit A_k une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$ tels que $\sum_k \mu(A_k) < +\infty$. Montrer que l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité d'ensembles A_k est de mesure 0.
Indication : on pourra commencer par montrer que cet ensemble est égal à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$.

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne. On considère deux applications $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ mesurables et une application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.
1. Montrer que $h : X \to \mathbb{R}$, définie par $h(x) = \phi(f_1(x), f_2(x))$ pour tout $x \in X$, est mesurable.
2. En déduire que $f_1 + f_2$, $\max(f_1, f_2)$ et $f_1 f_2$ sont mesurables.
3. Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On pose $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. Vérifier que $f = f^+ - f^-$. Montrer que f est mesurable si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathbb{C}$ muni de la tribu borélienne. Montrer qu'une application $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si sa partie réelle $\mathrm{Re}(f)$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de X telle que chaque A_n soit mesurable et $f_n \colon A_n \to Y$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que $f \colon X \to Y$ définie par $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$ est mesurable.