Feuille d'exercices I.

Exercice 1. On travaille dans un ensemble X fixé. On désigne par A, B des parties de X, et par $(A_i), (B_i)$ des familles de parties de X indexées par un ensemble *quelconque* d'indices I. On désigne par A^c le complémentaire dans X de la partie A.
Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de X, alors
$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n = \bigcup\limits_{n\geq n_0} A_n$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties de X, alors
$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \bigcap\limits_{n\geq 0} A_n = \bigcap\limits_{n\geq n_0} A_n$.
3. $A \cap (\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \cap B_i)$ et $A \cup (\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \cup B_i)$.
4. $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)^c = \bigcap\limits_{i\in I} A_i^c$ et $(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)^c = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c$.
5. $A \setminus (\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \setminus B_i)$ et $(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
6. $A \setminus (\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \setminus B_i)$ et $(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$.

Exercice 2. On considère deux ensembles X et Y, et une application $f : X \to Y$.
Si $B \subseteq Y$, l'*image réciproque* de B par f est définie par $f^{-1}(B) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) \in B\}$. Montrer les relations suivantes :

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
2. $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
3. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
4. Si de plus g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Exercice 3.
1. On rappelle que la *partie entière* d'un réel x, notée $E(x)$, est définie comme étant le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Déterminer $E^{-1}(\mathbb{N})$, $E^{-1}(\mathbb{Z})$, $E^{-1}(]-1, 1[)$, $E^{-1}(]0, 1[)$, $E^{-1}(]-2, 3])$, $E^{-1}([-\frac{5}{2}, -1[)$ et $E^{-1}(]-\frac{5}{2}, -1[)$.
2. On considère $f\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Déterminer $f^{-1}(]0, 1|)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([2, 3])$ et $f^{-1}([1, +\infty[)$.

Exercice 4. Soit X un ensemble non vide. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X est fini ou dénombrable.
2. Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X.
3. Il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit X un ensemble. Montrer qu'il ne peut pas exister de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
Indication : on pourra supposer que $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$ est une surjection, et considérer $A = \{x \in X \colon x \notin f(x)\}$.

Exercice 6.

1. On se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0,1]$. Montrer que l'on peut construire une suite de segments $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ayant les propriétés suivantes ;
   (a) Pour tout k, $x_k \notin I_k$
   (b) Pour tout k, $I_{k+1} \subseteq I_k$.

   A l'aide de cette suite de segments, prouver qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $x \neq x_k$.
2. Montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable. $\mathbb{R}$ est-il dénombrable ?

Exercice 7.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
2. On appelle nombre *algébrique* un réel x tel qu'il existe un polynôme P à coefficients rationnels satisfaisant $P(x) = 0$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
3. Montrer qu'il existe des réels qui ne sont pas des nombres algébriques.