Quelques propriétés du produit de convolution.

Dans tout l'exercice, λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes. Si $x \in \mathbb{R}$, on notera

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)d\lambda(t)$$

quand cette intégrale est définie. On dit que $f * g$ est le *produit de convolution*, ou la *convolée*, de f et g.

1. (a) D'après quel théorème du cours, a-t-on $x \to \int_{\mathbb{R}} |f(t)||g(x-t)|d\lambda(t)$ borélienne ?
   (b) En déduire que $\{x \in \mathbb{R} \colon f * g(x) \text{ est défini}\}$ est un borélien.
   (c) Montrer que $f*g = g*f$ (c'est-à-dire que les deux fonctions ont le même domaine de définition et sont égales sur ce domaine).
   (d) Montrer que, si f est nulle hors de $A \subseteq \mathbb{R}$ et g est nulle hors de $B \subseteq \mathbb{R}$ alors $f * g$ est nulle hors de $A + B$.
2. On suppose dans cette question que f et g appartiennent toutes les deux à $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.
   (a) Montrer que $f * g$ est défini pour presque tout x, et que
   $$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 \ .$$
   (b) On considère U et V deux variables aléatoires indépendantes sur un même univers et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que U a pour densité de probabilité f et V a pour densité de probabilité g ; en particulier f et g sont positives et $\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1$.
   Rappelons que la variable aléatoire $X = (U, V)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ a pour densité de probabilité $(u, v) \to f(u)g(v)$. Montrer que la variable aléatoire $U + V$ a pour densité $f * g$.
   (c) Supposons que f et g correspondent aux lois exponentielles de paramètres α et β respectivement. Calculer la densité de $U + V$.
3. On suppose dans cette question que p, q sont des exposants conjugués, que $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ et que $g \in L^q(\mathbb{R}, \lambda)$.
   (a) Montrer que $f * g(x)$ est défini pour tout x et que $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra par exemple supposer que $q < +\infty$).
   (c) On suppose que $p < +\infty$ et $q < +\infty$. Montrer que $f * g(x)$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$ (on pourra commencer par traiter le cas où f, g sont continues à support compact).
4. Maintenant, on suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ et g est C^1 à support compact. Montrer que $f * g$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$(f * g)'(x) = f * g'(x).$$
   (On pourra essayer d'appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres)