Interrogation 3, 10 décembre 2014 : Correction.

Exercice 1. 1. Commençons par remarquer que f est continue sur $U =]0, +\infty[\times]0,1[$ et donc aussi borélienne. De plus, on a $|f(x,y)| \leq e^{-x}$ pour tout $(x,y) \in U$; et le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à $g\colon (x,y) \mapsto e^{-x}$ (qui est à valeurs positives) nous dit que

$$\int_U g d\lambda = \int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{y=0}^{1} e^{-x} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1 \ .$$

Puisque $|f|$ est majorée par g, on vient de montrer que $\displaystyle\int_U |f| d\lambda \leq 1$, donc f est intégrable sur U.

2. Comme f est intégrable d'après la question précédente, on peut appliquer le théorème de Fubini et obtenir

$$I = \int_U f d\lambda = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{-x}\cos(2xy) dy \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[\frac{\sin(2xy)}{2x} \right]_0^1 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(2x)}{2x}\, dx$$

Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on obtient comme prévu que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}\, dx$.

3. Le théorème de Fubini nous permet aussi d'affirmer que

$$I = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} \cos(2xy)\, dx \right) dy$$

A y fixé, commençons par calculer

$$\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\cos(2xy)\, dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(2iy-1)x}\, dx \right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(2iy-1)x}}{2iy-1} \right]_0^{+\infty} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-2iy} \right) = \frac{1}{1+4y^2} \ .$$

On obtient donc

$$I = \int_0^1 \frac{dy}{1+4y^2} = \left[\frac{\arctan(2y)}{2} \right]_0^1 = \frac{\arctan(2)}{2} \ .$$

Exercice 2. Commençons par noter que D est ouvert ; pour $(u,v,w) \in D$ posons $\varphi(u,v,w) = (\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv})$. C'est une fonction de classe C^1 ; montrons que l'on a $\varphi(D) =]0,1[^3$. Pour cela, fixons $(x,y,z) \in]0,1[^3$; en essayant de résoudre l'équation $\varphi(u,v,w) = (x,y,z)$ on voit que l'on doit avoir

$$w = \frac{xy}{z},\ u = \frac{yz}{x} \text{ et } v = \frac{xz}{y} \ .$$

Alors (u,v,w) ainsi défini appartient bien à D, et on vérifie que $\varphi(u,v,w) = (x,y,z)$: par exemple, la première coordonnée de $\varphi(u,v,w)$ est égale à $\sqrt{\dfrac{(xy)(xz)}{yz}} = \sqrt{x^2} = x$. On vient de montrer que $\varphi(D) =]0,1[^3$, et notre raisonnement précédent montre même mieux, puisque étant donné $(x,y,z) \in]0,1[^3$ on n'a qu'un seul triplet (u,v,w) tel que $\varphi(u,v,w) = (x,y,z)$: φ est injective sur D, et est donc finalement une bijection de D sur $]0,1[^3$.
Calculons maintenant la matrice jacobienne de φ en un point $(u,v,w) \in D$, qui vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{u}} & 0 & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{w}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} & 0 \end{pmatrix}$$

En développant (par exemple) par rapport à la première colonne, on obtient que le déterminant jacobien de cette matrice vaut

$$-\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{u}}\left(-\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}}\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\right)+\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\left(\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}}\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{w}}\right)=\frac{1}{4}\neq 0\ .$$

On peut donc maintenant conclure que φ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert D sur l'ouvert $]0,1[^3$; la formule de changement de variables nous donne alors

$$\lambda(D)=\int_{]0,1[^3} 4d\lambda = 4\ .$$

(La dernière intégrale se calcule facilement à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli)

Exercice 3.

1. Fixons α, β positifs. La fonction $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas continue en 0) mais elle est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, ce qui suffit à garantir qu'elle est borélienne. Par définition, $f_{\alpha,\beta}\in L^p(\mathbb{R},\lambda)$ si et seulement si la fonction $|f_{\alpha,\beta}|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est paire, et on doit donc décider quand $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha p}(1+x^2)^{\beta p}}<+\infty$.
   Puisque la fonction intégrée est continue sur $]0,+\infty[$, nous nous trouvons donc amenés à décider de la convergence d'une intégrale généralisée ; la fonction intégrée est positive, et équivalente en 0 à $\dfrac{1}{x^{\alpha p}}$: le critère de Riemann nous dit que l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha p<1$.
   De même, en $+\infty$ notre fonction est équivalente à $\dfrac{1}{x^{\alpha p+2\beta p}}$, et le critère de Riemann nous permet d'affirmer que l'intégrale converge en $+\infty$ si et seulement si $(\alpha+2\beta)p>1$.
   Finalement, $f_{\alpha,\beta}\in L^p(\mathbb{R},\lambda)$ si et seulement si on a à la fois $\alpha p<1$ et $(\alpha+2\beta)p>1$.
2. Commençons par traiter le cas où $1\leq p<q<+\infty$. Alors on peut trouver α tel que $\alpha p<1$ et $\alpha q>1$ (par exemple, $\alpha=\frac{1}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})$) ; d'après le résultat de la question précédente, la fonction $f_{\alpha,\frac{1}{p}}$ est dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$ mais pas dans $L^q(\mathbb{R},\lambda)$. Avec la même valeur de α et $\beta=\alpha/2$, on a $2\beta p<1$ mais $2\beta q>1$, et alors la fonction $f_{0,\beta}$ appartient à $L^q(\mathbb{R},\lambda)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R},\lambda)$. Ceci montre qu'aucun des deux espaces $L^p(\mathbb{R},\lambda)$ et $L^q(\mathbb{R},\lambda)$ n'est inclus dans l'autre.
   Traitons enfin le cas où $1\leq p<+\infty$ et $q=+\infty$. La fonction constante égale à 1 est dans $L^\infty(\mathbb{R},\lambda)$ mais pas dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$; et avec $\alpha=\frac{1}{2p}$ (par exemple) la fonction $f_{\alpha,0}$ est dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$ mais pas dans $L^\infty(\mathbb{R},\lambda)$ (sur des petits intervalles autour de 0, la fonction prend des valeurs arbitrairement grandes ; par conséquent pour tout M l'ensemble $\{x\colon |f_{\alpha,0}|>M\}$ est de mesure strictement positive, donc $\|f_{\alpha,0}\|_\infty=+\infty$). Aucun des deux espaces $L^p(\mathbb{R},\lambda)$ et $L^\infty(\mathbb{R},\lambda)$ n'est donc inclus dans l'autre.