Interrogation 2, 7 novembre 2014 : Correction.

Exercice 1 (Question de cours)**.** Fixons $t > 0$, et posons $g(x) = t$ si $f(x) \geq t$, et $g(x) = 0$ sinon. Alors g est une fonction étagée, puisqu'elle ne prend que les deux valeurs 0 et t, et que $g^{-1}(\{0\}) = f^{-1}([0, t[)$, $g^{-1}(\{t\}) = f^{-1}([t, +\infty])$ sont mesurables puisque f est mesurable. De plus, on a $g \leq f$ partout, ce dont on déduit que $\displaystyle\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$, autrement dit $t\,\mu(\{x\colon f(x) \geq t\}) \leq \displaystyle\int_X f d\mu$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2. Tout d'abord, notons que $\mu(X) = 1$, donc $X \in \mathcal{A}'$. Ensuite, supposons que A appartient à $\mathcal{A}'$. Alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$ et on a $\mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu(X) = 1$; donc si jamais $\mu(A) = 0$ on a $\mu(X \setminus A) = 1$, et si $\mu(A) = 1$ alors $\mu(X \setminus A) = 0$. Dans les deux cas on conclut que $X \setminus A \in \mathcal{A}'$.
Supposons maintenant que (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$. Alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre ; si on a $\mu(A_n) = 0$ pour tout n alors $\mu(A) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = 0$, donc $\mu(A) = 0$ et $A \in \mathcal{A}'$. Sinon, c'est qu'on a $\mu(A_n) = 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et alors on a $\mu(A) \geq \mu(A_n) = 1$ puisque A contient A_n. Comme par ailleurs $\mu(A) \leq \mu(X) = 1$, on en déduit que $\mu(A) = 1$ et on a encore $A \in \mathcal{A}'$.
On vient de vérifier que $\mathcal{A}'$ satisfait les trois conditions définissant une σ-algèbre.

Exercice 3.

1. Fixons $x \in \mathbb{R}$, et posons $f(t) = \dfrac{t-1}{t^x \ln(t)}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est généralisée en 1 et en $+\infty$; la fonction intégrée est continue et positive sur $]1, +\infty[$. En 1^+ on a $f(t) \sim \dfrac{t-1}{\ln(t)} \to 1$ (c'est l'inverse du taux d'accroissement de ln au point 1). Par conséquent, la fonction intégrée se prolonge par continuité en 1, et il ne nous reste plus qu'à l'étudier en $+\infty$.
   En $+\infty$, on a $f(t) \sim \dfrac{t^{1-x}}{\ln(t)}$. En particulier, $f(x) < t^{1-x}$ pour t assez grand, ce qui montre (puisque f est positive) grâce au critère de Riemann que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est bien définie pour tout $x > 2$.
   Pour voir que l'intégrale ne converge pas quand $x \leq 2$, on peut déjà décider ce qui se passe en $x = 2$: dans ce cas on doit décider si l'intégrale $\displaystyle\int_2^y \frac{1}{t\ln(t)} = \ln(\ln(y))$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$. Ce n'est pas le cas, donc l'intégrale considérée diverge quand $x = 2$. Si $x < 2$, alors $\dfrac{t-1}{t^x \ln(t)} \geq \dfrac{t-1}{t^2 \ln(t)}$ pour tout $t > 1$, donc le fait que l'intégrale diverge en $x = 2$ nous permet de conclure qu'elle diverge aussi quand $x < 2$.
   Finalement, on a obtenu que l'intégrale considérée converge si et seulement si $x > 2$.
2. (a) Fixons $a > 2$. La fonction $(x, t) \mapsto \dfrac{t-1}{t^x \ln(t)}$ est continue sur $]a, +\infty[\times]1, +\infty[$, et y admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par la formule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \dfrac{1-t}{t^x}$, qui est également une fonction continue des deux variables. De plus, pour tout $x > a$ on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \dfrac{t-1}{t^a}$ et cette fonction est intégrable sur $]1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann. Comme on a déjà vu que $F(x)$ est convergente pour tout $x > 2$, toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, et conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$]a,+\infty[$, de dérivée donnée par

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{1-t}{t^x}\, dt \\ &= \int_1^{+\infty} t^{-x}\, dt - \int_1^{+\infty} t^{1-x}\, dt \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \; . \end{aligned}$$

Ce raisonnement étant valable sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 2$, on a bien montré que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]2,+\infty[$ et que $F'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ pour tout $x > 2$.

(b) Soit (x_n) une suite tendant vers $+\infty$; on peut supposer que $x_n \geq 3$ (par exemple) pour tout n. Alors la suite de fonctions $f_n \colon t \mapsto \frac{t-1}{t^{x_n}\ln(t)}$ converge simplement vers la fonction nulle, et est dominée par la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{t^3\ln(t)}$, dont on a déjà vu qu'elle était intégrable. On peut par conséquent appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) et conclure que $\int_1^{+\infty} f_n(t)\, dt = F(x_n)$ converge vers 0. On vient de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x) = 0$.

(c) Le théorème fondamental de l'analyse, et le fait que $F'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ pour tout $x > 2$, nous permettent de déduire que pour tout $x > 2$ on a $F(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2) + C$, où C est une constante réelle. En $+\infty$, on a que $F(x) \to 0$ et $\ln(x-1) - \ln(x-2) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \to 0$. Par conséquent $C = 0$, et on a montré que

$$\forall x > 2 \quad \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^x \ln(t)}\, dt = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \; .$$

Exercice 4. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable.

1. (a) Notons tout d'abord que $E_n \in \mathcal{A}$ pour tout n puisque f est mesurable. Ensuite, par définition de E_n on a $n \leq f(x) < n+1$ pour tout $x \in E_n$, ce dont on déduit par positivité de l'intégrale que $n\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f d\mu \leq (n+1)\mu(E_n)$.

Puisque les E_n sont deux à deux disjoints et leur réunion vaut E, on a $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f\mathbf{1}_{E_n}$, somme de fonctions mesurables positives, et on peut échanger série et intégrale par le théorème de convergence monotone pour obtenir

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f\mathbf{1}_{E_n} d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{E_n} f d\mu \; .$$

On obtient donc bien que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(E_n) \leq \int_E f d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\mu(E_n) \; .$$

(b) Si μ est finie alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu(E_n) = \mu(E) < +\infty$; l'encadrement obtenu à la question précédente montre donc que $\int_X f d\mu < +\infty$ si, et seulement si, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.

2. Chaque F_n est encore mesurable, et le fait que $2^n \leq f(x) \leq 2^{n+1}$ pour tout $x \in F_n$ nous donne que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \;\; 2^n \mu(F_n) \leq \int_{F_n} f d\mu \leq 2^{n+1}\mu(F_n) \; .$$

Cette fois-ci on a $\bigcup_n F_n = E \setminus f^{-1}(\{0\})$. Nommons cet ensemble F ; le même raisonnement que ci-dessus nous donne, puisque les F_n sont deux à deux disjoints, que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(F_n) \leq \int_F f d\mu \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{n+1}\mu(F_n) \; .$$

Notons que, par définition, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in E \setminus F$, par conséquent $\displaystyle\int_{E \setminus F} f d\mu = 0$ et donc $\displaystyle\int_F f d\mu = \int_E f d\mu$.
Si on note $S = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(F_n)$, l'inégalité qu'on a obtenue ci-dessus se réécrit sous la forme $S \leq \displaystyle\int_E f d\mu \leq 2S$. On voit donc que $\displaystyle\int_E f d\mu < +\infty$ si et seulement si $S < +\infty$, autrement dit, f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(F_n) < +\infty$.

Exercice 5. 1. En faisant le changement de variables $u = a_n x$ (légal puisque $a_n > 0$) on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)| dx = \frac{1}{a_n} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du$.
Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)| dx = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty \; .$$

2. On peut considérer la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |f(a_n x)|$; en tant que somme de fonctions positives sa somme g est bien définie et mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$. Le théorème de convergence monotone nous permet d'échanger série et intégrale, autrement dit d'écrire (en notant μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) que

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)| dx \; .$$

Le résultat de la première question nous dit donc que $\displaystyle\int_R g d\mu < +\infty$, par conséquent $\{x \colon g(x) = +\infty\}$ doit être de mesure nulle.

Autrement dit, pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) < +\infty$, c'est-à-dire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n x)$ est absolument convergente.

3. En posant $a_n = n^2$, on est en situation pour appliquer le résultat de la question précédente puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ est convergente. Par conséquent, μ-presque partout $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n^2 x)| < +\infty$, ce qui implique en particulier que $f(n^2 x)$ converge presque partout vers 0 puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0.