2014/2015 **Semestre d'automne**
Université Lyon I **MASS 51**

Interrogation 1, 17 octobre 2014, durée 1h30.

Notes de cours et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction.

Question de cours. Énoncer le théorème de convergence monotone.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Vérifier que f est borélienne, intégrable au sens de Lebesgue et calculer son intégrale sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la suite des intégrales
$$\left(\int_0^{+\infty} \exp\left((\sin(x))^n \right) f(x) dx \right)_{n \geq 0}$$
est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. Pour chaque entier $n \geq 2$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + \ldots + x^n}$.
Montrer que $I_n < +\infty$ pour tout $n \geq 2$, que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3. Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ qui vérifie les conditions suivantes :
(C_1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mu(\{x\}) = 0$.
(C_2) Pour tous les réels $a < b$, on a $\mu([a, b]) < +\infty$.

1. Déterminer si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mu\left( ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\right)$ existe et donner sa valeur le cas échéant.
2. Montrer que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.
3. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. On définit une fonction $f_A : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ en posant $f_A(x) = \mu\left(A \cap [-|x|, |x|] \right)$. Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer f_A dans le cas où $A = \mathbb{Q}$.
4. On suppose dans cette question que μ est la mesure de Lebesgue. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$ (on ne demande pas de justifier le tracé des graphes).