Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique-L3

Feuille d'exercices n° 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Exercice 1. **Asymptotique, raideur & schéma implicite.**

Soit $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbf{R}_+,\ x'(t) = -ax(t) + b), \tag{1}$$

1. (a) Donner explicitement x.
   (b) Quel est le comportement de $x(t)$ quand $t \to +\infty$?
2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (1).
   On notera $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.
   (b) Donner explicitement $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (c) Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit x_0, x_n tende quand $n \to +\infty$ vers $\lim_{t\to\infty} x(t)$?
   (d) On suppose cette condition satisfaite.
   Exprimer en fonction de a le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $x_{|[0,10]}$.
   Quel est ce nombre lorsque $a = 100$?
   (e) Répondre à $(a) - (c)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.

Exercice 2. **Problèmes Hamiltoniens : l'oscillateur harmonique.**

Soit $(x_0, p_0) \in \mathbf{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = p_0, \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbf{R}_+,\ x''(t) + x(t) = 0)\,. \tag{2}$$

1. On introduit $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x,p) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$.
   (a) Montrer que la réduction d'ordre appliquée à (2) conduit au problème de Cauchy

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \partial_p H(x(t),p(t)) \\ -\partial_x H(x(t),p(t)) \end{pmatrix}\right). \tag{3}$$

   (b) Montrer que si (x,p) résout (3) alors

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ H(x(t),p(t)) = H(x_0,p_0)\,.$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.

   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (3).
   On notera $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $((x_n, p_n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.

   (b) Donner explicitement $(H(x_n, p_n))_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) Qu'arrive-t-il à $\|(x_n, p_n)\|$ quand $n \to +\infty$?

   (d) Répondre à $(a)-(c)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.

3. On définit $H_{num} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $(x, p, h) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2 + h\,xp)$.
   Soit $h > 0$ un pas de temps.

   (a) Montrer que, pour tout $(x, p, h) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$, alors

   $$\left(1 - \tfrac{1}{2}h\right)\, H(x,p) \;\leq\; H_{num}(x,p,h) \;\leq\; \left(1 + \tfrac{1}{2}h\right)\, H(x,p)\,.$$

   (b) Justifier que le schéma implicite

   $$\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_n \\ -x_{n+1} \end{pmatrix}\right). \tag{4}$$

   est bien défini. Ce schéma est appelé *schéma d'Euler symplectique*.

   (c) Montrer que la suite ainsi construite vérifie

   $$\forall n \in \mathbf{N},\ H_{num}(x_n, p_n, h) = H_{num}(x_0, p_0, h)\,.$$

   (d) Montrer que le schéma d'Euler symplectique à pas constant est convergent et au moins d'ordre 1.