Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique-L3

Quelques rappels sur les équations différentielles

On rappelle ici quelques éléments de théorie sur les équations différentielles, parfois dites *équations différentielles ordinaires* par opposition aux équations aux dérivées partielles. Elles permettent entre autres choses d'écrire des équations pour l'évolution de phénomènes essentiellement ponctuels.

1 Réductions d'ordre

Définition 1 *Soit I intervalle, $d \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \times (\mathbf{R}^d)^n \to \mathbf{R}^d$ continue. Soit $J \subset I$ un intervalle. On dit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ $u : J \to \mathbf{R}^d$ résout sur J l'*équation différentielle d'ordre *n associée à f si*

$$\forall t \in J\,, \quad u^{(n)}(t) \;=\; f(t, u(t), \cdots, u^{(n-1)}(t))\,.$$

Remarque 2 *Il existe d'autres formes d'équations différentielles. Celles présentées comme ci-dessus sont dites* résolues. *Grâce au théorème d'inversion locale,* localement *toute équation différentielle régulière peut être récrite sous forme résolue.*

Remarque 3 *Lorsque f est en fait indépendante du temps — c'est-à-dire que pour tout $(t,s) \in I^2$, pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$, $f(t, u_1, \cdots, u_n) = f(s, u_1, \cdots, u_n)$ —, on dit que l'équation est* autonome.

Remarque 4 *Quitte à augmenter d, on peut toujours supposer $n = 1$. Il suffit de remplacer u par $v : J \to (\mathbf{R}^d)^n$, $t \mapsto (u(t), \cdots, u^{(n-1)}(t))$ et f par*

$$g \;:\quad I \times (\mathbf{R}^d)^n \to (\mathbf{R}^d)^n\,, \quad (t, v) \mapsto (v_2, \cdots, v_n, f(t, v))\,.$$

On se focalisera désormais en conséquence sur l'ordre 1.

Exemple 5 *Ainsi l'équation de Newton*

$$m\ddot{x}(t) \;=\; F(t, x(t), m\dot{x}(t))$$

se récrit

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\, p(t) \\ F(t, (x,p)(t)) \end{pmatrix}\,.$$

Remarque 6 *Il existe une réduction analogue pour se ramener au cas autonome mais elle ne préserve pas toutes les simplifications usuelles de la théorie (linéarité,...). Aussi nous n'en ferons pas usage.*

2 Formulation intégrale et théorie locale

Soit I une intervalle, $d \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$.
Pour espérer une unique solution il nous faut compléter l'équation par une donnée initiale $u_0 \in \mathbf{R}^d$ en un temps $t_0 \in I$. On parle de *problème de Cauchy.* Le point clé de la théorie est que l'équation avec sa condition initiale se récrivent comme un problème de point fixe.

Proposition 7 *On suppose f continue. Soit $J \subset I$ un intervalle, $t_0 \in J$ et $u_0 \in \mathbf{R}^d$.*
Pour toute fonction $u : J \to \mathbf{R}^d$ sont équivalents

1. *u est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie*
$$u(t_0) = u_0 \qquad \textit{et} \qquad \forall t \in J\,, \quad u'(t) \;=\; f(t, u(t))\,;$$

2. *u est continue et vérifie*
$$\forall t \in J\,, \quad u(t) \;=\; u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds\,.$$

Remarque 8 *Cela permet de vérifier que si l'on recolle deux solutions de l'équation différentielle par un point où elles coïncident, alors on obtient une solution. En particulier, quitte à découper $I = (I \cap [\inf I, t_0]) \cup (I \cap [t_0, \sup I]) =: I_1 \cup I_2$, on peut se ramener aux cas $t_0 = \min I$ ou $t_0 = \max I$. Par ailleurs le second cas se ramène au premier quitte à inverser la flèche du temps, c'est-à-dire quitte à changer t_0 en $-t_0$, I en $-I$, u en $v : -I \to \mathbf{R}^d$, $s \mapsto u(-s)$ et f en $(-I) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $(s, v) \mapsto -f(-s, v)$. Par ailleurs on peut également supposer — sans perdre en généralité — que $t_0 = 0$ quitte à translater en temps c'est-à-dire quitte à changer I en $-t_0 + I$, u en $v : -t_0 + I \to \mathbf{R}^d$, $s \mapsto u(t_0 + s)$ et f en $(-t_0 + I) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $(s, v) \mapsto f(t_0 + s, v)$.*

Remarque 9 *Si J est un segment, sous les hypothèses de la proposition le problème se récrit comme la recherche d'un point fixe pour*
$$\Phi : \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d) \to \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)\,, \quad u \mapsto (J \to \mathbf{R}^d,\, t \mapsto u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds)$$
définie sur l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par
$$\forall u \in \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)\,, \quad \|\, u \,\|_\infty = \max_{t \in J} \|u(t)\|\,.$$
En élaborant à partir du théorème de point fixe de Banach on obtient alors le théorème qui suit.

Théorème 10 Théorème de Cauchy-Lipschitz.
On suppose f continue sur $I \times \mathbf{R}^d$ et localement Lipschitzienne en sa seconde variable.
Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbf{R}^d$. Alors il existe un intervalle maximal d'existence $I_* \subset I$ pour le problème de Cauchy. Cet intervalle est ouvert dans I et contient t_0. De plus il existe une unique solution maximale $u : I_* \to \mathbf{R}^d$ au problème de Cauchy.
L'unicité et la maximalité sont au sens où s'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 et $v : J \to \mathbf{R}^d$ une solution au problème de Cauchy, alors $J \subset I_*$ et $v = u_{|J}$.
De plus, on a

– **cas globalement Lipschitzien :** *si f est en fait globalement Lipschitzienne en sa seconde variable, alors $I_* = I$;*
– **régularité :** *si f est de plus $\mathcal{C}^m$, $m \in \mathbf{N}$, alors u est $\mathcal{C}^{m+1}$;*
– **explosion en temps fini :** *si $\sup I_* < \sup I$, alors $\|u(t)\| \overset{t\to\sup I_*}{\to} +\infty$, et si $\inf I_* > \inf I$, alors $\|u(t)\| \overset{t\to\inf I_*}{\to} +\infty$;*
– **continuité par rapport à la donnée initiale :** *si $J \subset I_*$ est un segment contenant t_0, alors il existe un voisinage $U \subset \mathbf{R}^d$ de u_0 tel que l'application*

$$U \to \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)\,, \quad v_0 \mapsto v_{|J} \text{ où } v \text{ est la solution maximale associée à } v_0$$

soit bien définie et Lipschitzienne.

Remarque 11 *Rappelons que par définition de la compacité, si f est localement Lipschitzienne alors tout compact possède un voisinage sur lequel f est Lipschitzienne. Par ailleurs dès que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times \mathbf{R}^d$, alors f est bien continue et localement Lipschitzienne.*

Remarque 12 *Si f n'était définie que sur $I \times \Omega$ avec $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert, alors en plus de contrôler les normes $\|u(t)\|$ il faudrait contrôler les distances au bord $d(u(t), \partial\Omega)$.*

Remarque 13 *La simple continuité ne suffit pas à assurer l'unicité. Comme le montre l'exemple de*

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad (t, v) \mapsto 2\sqrt{|v|}\,,$$

$t_0 = 0$, $u_0 = 0$ qui possède comme solution à la fois la fonction nulle et

$$u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque 14 *On dit qu'une solution maximale est* globale *lorsque $I_* = I$. L'existence globale n'implique pas que la solution maximale est bornée. Mais pour montrer que la solution maximale est globale il suffit de montrer que u ne peut pas exploser avant le bord de I. L'équation donne souvent directement une borne sur u en fonction d'elle-même. Le lemme qui suit (et plus encore ses nombreuses variantes) appliqué à $y : I_* \to \mathbf{R}_+$, $t \mapsto \|u(t)\|$ permet parfois de rendre ce cercle vertueux.*

Lemme 15 Lemme de Gronwall. *Si $J = [t_0, t_1]$ est un segment, $A \in \mathbf{R}_+$, $B : J \to \mathbf{R}_+$ est continue et $y : J \to \mathbf{R}_+$ est une fonction continue telle que*

$$\forall t \in J, \quad y(t) \;\leq\; A + \int_{t_0}^t B(s)\, y(s)\, ds\,,$$

alors

$$\forall t \in J, \quad y(t) \;\leq\; A \exp\left(\int_{t_0}^t B(s)\, ds\right).$$

Remarque 16 *Le lemme précédent (et ses variantes) permet de traiter les cas qui s'obtiennent par des majorations mais pas ceux qui correspondent à des annulations ou à certaines positivités. Ainsi il permet de montrer que si f croît au plus linéairement en sa seconde variable alors les solutions maximales sont globales mais pas que les solutions associées à $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(t, u) \mapsto \varepsilon\, u^2$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, sont globales si $\varepsilon = -1$ mais explosent parfois en temps fini si $\varepsilon = 1$.*

3 Théorie linéaire autonome

Comme souvent on ne peut guère espérer résoudre explicitement les équations différentielles que dans le cas linéaire, et en l'occurrence seulement le cas linéaire et autonome (et le cas linéaire scalaire que l'on ne rappellera pas).

Proposition 17 *Soit* $d \in \mathbf{N}^*$*,* $t_0 \in \mathbf{R}$*,* $u_0 \in \mathbf{R}^d$ *et* $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$*.*
On considère $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$*,* $(t, u) \mapsto A\,u$*.*
Alors la solution maximale associée au problème de Cauchy est globale et donnée par

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^d, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A}\,u_0\,.$$

Remarque 18 *Les exponentielles des blocs de Jordan étant explicites, puisque si* $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\forall t \in \mathbf{R}\,, \forall (i_0, j_0) \in [\![1, d]\!]^2\,, \quad (\exp(t\,[\lambda\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}]_{i,j}))_{i_0,j_0} \;=\; \begin{cases} e^{\lambda\,t}\dfrac{t^{j_0-i_0}}{(j_0-i_0)!} & \textit{si } j_0 \geq i_0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}\,,$$

la décomposition de Jordan donne théoriquement un caractère complètement explicite au résultat qui précède.

Par ailleurs ce résultat peut être étendu aux cas affines dont la partie linéaire est autonome.

Proposition 19 Variation de la constante *ou* **formulation de Duhamel.**
Soit I *un intervalle,* $d \in \mathbf{N}^*$*,* $t_0 \in I$*,* $u_0 \in \mathbf{R}^d$*,* $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ *et* $b : I \to \mathbf{R}^d$ *continue.*
On considère $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$*,* $(t, u) \mapsto A\,u + b(t)$*.*
Alors la solution maximale associée au problème de Cauchy est globale et donnée par

$$I \to \mathbf{R}^d, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A}\,u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\,b(s)\,ds\,.$$