Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique - L3

Contrôle final : partie théorique

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Interpolation de Hermite.

Dans tout ce qui suit, pour $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_m[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus m.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, \cdots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on note

$$L_j(X) \;=\; \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(X - x_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)}$$

le j-ième polynôme de Lagrange associé aux points $x_0, \cdots, x_n$. On considère

$$\Phi \;:\; \mathbf{R}_{2n+1}[X] \;\to\; \mathbf{R}^{2n+2}\,, \quad P \;\longmapsto (P(x_0), \cdots, P(x_n), P'(x_0), \cdots, P'(x_n))\,.$$

(a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\Phi(P)$ pour

$$P(X) \;=\; (X - x_j) \times (L_j(X))^2 \qquad \text{et} \qquad P(X) \;=\; \left(1 - 2\frac{L_j'(x_j)}{L_j(x_j)}(X - x_j)\right) \times (L_j(X))^2\,.$$

Consigne : on veillera à exprimer les réponses dans la base canonique $(e_k)_{1\leq k\leq 2n+2}$ de $\mathbf{R}^{2n+2}$.

(b) Montrer que Φ est une bijection.

2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On se donne $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, \cdots, x_n$ des réels de $[a, b]$ deux à deux distincts. On considère $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n+3}$. On note Π le polynôme

$$\Pi(X) \;=\; \prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$$

et P l'unique polynôme de $\mathbf{R}_{2n+1}[X]$ tel que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$P(x_j) \;=\; f(x_j) \qquad \text{et} \qquad P'(x_j) \;=\; f'(x_j)\,.$$

(a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$.

i. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que le polynôme $Q_\alpha(X) = P(X) + \alpha(\Pi(X))^2$ vérifie

$$Q_\alpha(x) \;=\; f(x) \qquad \text{et, pour tout } j \in [\![0, n]\!]\,, \quad Q_\alpha(x_j) \;=\; f(x_j) \quad \text{et} \quad Q_\alpha'(x_j) \;=\; f'(x_j)\,.$$

On note α_0 cet unique α.

ii. Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathbf{R}$ tel que le polynôme

$$R_\beta(X) \;=\; Q_{\alpha_0}(X) \,+\, \beta\,(X-x)\,(\Pi(X))^2$$

vérifie

$$R_\beta(x) \;=\; f(x)\,, \qquad R'_\beta(x) \;=\; f'(x)\,,$$

$$\text{et, pour tout } j \in [\![0,n]\!]\,, \qquad R_\beta(x_j) \;=\; f(x_j) \qquad \text{et} \qquad R'_\beta(x_j) \;=\; f'(x_j)\,.$$

On note β_0 cet unique β.

iii. Montrer qu'il existe $(\xi,\eta) \in [a,b]^2$ tel que

$$\alpha_0 \;=\; \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \qquad \text{et} \qquad \beta_0 \;=\; \frac{f^{(2n+3)}(\eta)}{(2n+3)!}\,.$$

(b) Montrer que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| \;\leq\; \frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+2)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n+2)}|$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f'(x)-P'(x)| \;\leq\; \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n+2)}| \,+\, \frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+3)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n+3)}|\,.$$

Exercice 2. Méthode du gradient conjugué.

Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $b \in \mathbf{R}^d$ un vecteur et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive.
Dans tout ce qui suit, on procédera à l'identification canonique de $\mathbf{R}^d$ et $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbf{R})$ et l'on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^d$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
On rappelle que la matrice A définit canoniquement un autre produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ sur $\mathbf{R}^d$, *via*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^d\,, \quad \langle x,y\rangle_A \;=\; \langle x, Ay\rangle\,.$$

On cherche à résoudre le système $Ax=b$ en $x \in \mathbf{R}^d$ en minimisant la fonction

$$\phi \;:\; \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto \tfrac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle\,.$$

1. Montrer que la borne inférieure de ϕ est atteinte en un unique point x_* et que ce point x_* vérifie de plus $Ax_* = b$.
2. Soit $\ell \in [\![1,d]\!]$ et $p_1, \cdots, p_\ell$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^d$ et deux à deux orthogonaux pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^d$ et $y \in x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1,\cdots,p_\ell\})$.

   (a) Montrer que les propositions qui suivent sont équivalentes.

   i. La borne inférieure de $\phi(x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1,\cdots,p_\ell\}))$ est $\phi(y)$;

   ii. Le vecteur $\nabla\phi(y)$ est orthogonal à l'espace $\mathrm{Vect}(\{p_1,\cdots,p_\ell\})$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$;

   iii. On a

$$y \;=\; x_0 \,+\, \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\langle p_j, b - Ax_0\rangle}{\langle p_j, Ap_j\rangle}\, p_j\,.$$

(b) Montrer que les propositions qui suivent sont équivalentes.

i. La borne inférieure de $\phi(x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_\ell\}))$ est $\phi(y)$;

ii. Il existe $x \in x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_{\ell-1}\})$ tel que
   - la borne inférieure de $\phi(x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_{\ell-1}\}))$ est $\phi(x)$;
   - et l'on a :

$$y \;=\; x \,+\, \frac{\langle p_\ell, b - Ax_0\rangle}{\langle p_\ell, Ap_\ell\rangle}\, p_\ell\,.$$

(c) Montrer que si $x \in x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_{\ell-1}\})$, alors

$$\langle p_\ell, b - Ax_0\rangle \;=\; \langle p_\ell, b - Ax\rangle\,.$$

3. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^d$. On pose $r_0 = b - Ax_0$ et $p_1 = r_0$. Puis récursivement, pour $k \in \mathbf{N}$ tel que $p_{k+1} \neq 0$, l'on définit :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \frac{\langle p_{k+1}, r_k\rangle}{\langle p_{k+1}, Ap_{k+1}\rangle}\, p_{k+1}\\
r_{k+1} &= r_k - \frac{\langle p_{k+1}, r_k\rangle}{\langle p_{k+1}, Ap_{k+1}\rangle}\, A\, p_{k+1}\\
p_{k+2} &= r_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\langle r_{k+1}, Ap_j\rangle}{\langle p_j, Ap_j\rangle}\, p_j\,.
\end{aligned}$$

On arrête la construction à l'étape k si $p_{k+1} = 0$. On pose

$$\ell_0 \;=\; \begin{cases} k & \text{si la construction s'arrête à l'étape } k\,;\\ +\infty & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

(a) Montrer que pour $k \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq k \leq \ell_0$ l'on a
   - $r_k = b - Ax_k$;
   - $x_k \in x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_k\})$;
   - p_{k+1} est orthogonal à l'espace $\mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_k\})$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$;
   - r_k est orthogonal à l'espace $\mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_k\})$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(b) En déduire que $\ell_0 \leq d$.

(c) Montrer que $Ax_{\ell_0} = b$.

(d) Justifier que, pour $k \in [\![0, \ell_0]\!]$, l'on a :

$$\phi(x_k) \;=\; \min \phi(x_0 + \mathrm{Vect}(\{p_1, \cdots, p_k\}))\,.$$