Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique - L3

Correction devoir n° 2

<u>**Exercice 1.**</u>

1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Les zéros de f sont donc 0 et 1.
2. La fonction f est bien deux fois dérivables puisque polynomiale. On sait donc que le calcul approché d'un zéro de f par la méthode de Newton converge au moins à l'ordre 2 dès lors que ce zéro est simple. Or on a $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 1 \neq 0$. On ne peut garantir la convergence à l'ordre 2 que vers 1.
3. Une itération de la méthode de Newton permet de passer d'une approximation x_n à l'étape $n \in \mathbf{N}$ à l'approximation x_{n+1} à l'étape $n+1$ par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dès lors que $f'(x_n) \neq 0$. L'algorithme s'arrête à l'étape n dès lors que $f(x_n) = 0$ (convergence en un nombre fini d'étapes) ou $f'(x_n) = 0$ (sans converger si $f(x_n) \neq 0$).

Or, pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{2}{3}\}$, on a $f'(x) \neq 0$ et

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x^2}{3x^2 - 2x} = x - \frac{x^2 - x}{3x - 2} = x\,\frac{2x-1}{3x-2}\,.$$

(a) Partant de $x_0 = 1/4$, on trouve

$$x_1 = \frac{1}{4} \times \frac{2 \times \frac{1}{4} - 1}{3 \times \frac{1}{4} - 2} = \frac{1}{4} \times \frac{-1/2}{-5/4} = \frac{1}{10}$$

puis

$$x_2 = \frac{1}{10} \times \frac{2 \times \frac{1}{10} - 1}{3 \times \frac{1}{10} - 2} = \frac{1}{10} \times \frac{-4/5}{-17/10} = \frac{4}{85}\,.$$

(b) Partant de $x_0 = 1/2$, on trouve

$$x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{3 \times \frac{1}{2} - 2} = 0\,.$$

Puisque $f(x_1) = 0$, l'algorithme s'arrête. Convergence en un une étape !

(c) Pour $x_0 = 3/2$, on trouve

$$x_1 = \frac{3}{2} \times \frac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{3 \times \frac{3}{2} - 2} = \frac{3}{2}\,\frac{2}{5/2} = \frac{6}{5}$$

puis

$$x_2 = \frac{6}{5}\,\frac{2 \times \frac{6}{5} - 1}{3 \times \frac{6}{5} - 2} = \frac{6}{5}\,\frac{7/5}{8/5} = \frac{21}{20}\,.$$

Exercice 2.

1. La forme de Newton de P est

$$P(X) \ = \ f[0] + f[0,\theta]\,(X-0) + f[0,\theta,1]\,(X-0)\,(X-\theta) \ = \ f[0] + f[0,\theta]\,X + f[0,\theta,1]\,X\,(X-\theta)$$

où

$$\begin{aligned} f[0] &= f(0)\,, \\ f[0,\theta] &= \frac{f(\theta)-f(0)}{\theta-0} = \frac{f(\theta)-f(0)}{\theta}\,, \\ f[0,\theta,1] &= \frac{f[\theta,1]-f[0,\theta]}{1-0} = \frac{f(1)-f(\theta)}{1-\theta} - \frac{f(\theta)-f(0)}{\theta-0} = \frac{f(1)}{1-\theta} - \frac{f(\theta)}{(1-\theta)\,\theta} + \frac{f(0)}{\theta}\,. \end{aligned}$$

D'où

$$P(X) \ = \ f(0) + \frac{f(\theta)-f(0)}{\theta}X + \left(\frac{f(1)}{1-\theta} - \frac{f(\theta)}{(1-\theta)\,\theta} + \frac{f(0)}{\theta}\right) X(X-\theta)\,.$$

2. En intégrant la formule précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(x)dx &= f(0) + \frac{f(\theta)-f(0)}{2\theta} + \left(\frac{f(1)}{1-\theta} - \frac{f(\theta)}{(1-\theta)\,\theta} + \frac{f(0)}{\theta}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= f(0)\left(1 - \frac{1}{2\theta} + \frac{1}{3\theta} - \frac{1}{2}\right) + f(1)\left(\frac{1}{3(1-\theta)} - \frac{\theta}{2(1-\theta)}\right) \\ &\quad + f(\theta)\left(\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{3(1-\theta)\,\theta} - \frac{1}{2(1-\theta)}\right) \\ &= f(0) \times \frac{3\theta-1}{6\theta} + f(\theta) \times \frac{1}{6\theta(1-\theta)} + f(1) \times \frac{2-3\theta}{6(1-\theta)}\,. \end{aligned}$$

3. (a) Pour $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$, on a $f(0) = 0$, $f(\theta) = \theta^3$ et $f(1) = 1$, d'où

$$\int_0^1 P(x)dx \ = \ \theta^3 \frac{1}{6\theta(1-\theta)} + \frac{2-3\theta}{6(1-\theta)} \ = \ \frac{\theta^2+2-3\theta}{6(1-\theta)} \ = \ \frac{(\theta-1)(\theta-2)}{6(1-\theta)} \ = \ \frac{2-\theta}{6}\,.$$

(b) Pour $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x(1-x)(x-\frac{1}{2})$, on a $f(0) = 0$, $f(\theta) = \theta(1-\theta)(\theta-\frac{1}{2})$ et $f(1) = 0$. Par suite, dans ce cas, on trouve :

$$\int_0^1 P(x)dx \ = \ \theta(1-\theta)(\theta-\tfrac{1}{2}) \times \frac{1}{6\theta(1-\theta)} \ = \ \frac{1}{6}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\,.$$

4. Comme méthode de quadrature élémentaire associée à une interpolation à 3 nœuds, la méthode est déjà exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus 2.

   Par linéarité, la méthode est donc exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus 3 si et seulement si elle est exacte pour $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$, donc si et seulement si $(2-\theta)/6 = 1/4$, c'est-à-dire si et seulement si $2-\theta = 3/2$.

   La méthode est donc exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus 3 si et seulement si $\theta = 1/2$.

Exercice 3.

1. Le schéma d'Euler explicite définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\frac{T}{N})_{n\in\mathbf{N}}$ par
$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in \mathbf{N}\,,\ x_{n+1} = x_n \,+\, \tfrac{T}{N}\,x_n\big)\ .$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = (1+\frac{T}{N})\,x_n$. On déduit par une récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$x_n \;=\; \left(1+\frac{T}{N}\right)^n x_0 \;=\; \left(1+\frac{T}{N}\right)^n .$$
L'approximation au temps $T = t_N$ est donc
$$x_N \;=\; \left(1+\frac{T}{N}\right)^N .$$

2. Le schéma d'Euler implicite définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\frac{T}{N})_{n\in\mathbf{N}}$ par
$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in \mathbf{N}\,,\ x_{n+1} = x_n \,+\, \tfrac{T}{N}\,x_{n+1}\big)\ .$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = (1-\frac{T}{N})^{-1}\,x_n$. On déduit par une récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$x_n \;=\; \left(1-\frac{T}{N}\right)^{-n} .$$
L'approximation au temps $T = t_N$ est donc
$$x_N \;=\; \left(1-\frac{T}{N}\right)^{-N} .$$

3. Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'approximations aux temps $(t_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\frac{T}{N})_{n\in\mathbf{N}}$ par $x_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}$,
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n,1} &=& x_n \,+\, \frac{1}{2}\frac{T}{N}\,x_n \\ x_{n+1} &=& x_n \,+\, \frac{T}{N}\,x_{n,1} \end{array}\right. .$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$x_{n+1} \;=\; x_n \,+\, \tfrac{T}{N}\,\big(x_n \,+\, \tfrac{1}{2}\tfrac{T}{N}\,x_n\big) \;=\; \Big(1+\tfrac{T}{N}+\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{T}{N}\big)^2\Big)\,x_n\,.$$
On déduit comme précédemment que l'approximation au temps $T = t_N$ est
$$x_N \;=\; \left(1+\frac{T}{N}+\frac{1}{2}\left(\frac{T}{N}\right)^2\right)^N .$$

Exercice 4.

1. L'assertion est vraie.
En effet, Φ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$\Phi'(x) \;=\; \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\sin(\tfrac{x}{5}) \qquad \text{donc} \qquad |\Phi'(x)| \;\leq\; \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5} \;=\; \tfrac{7}{10}\,.$$
Ainsi, puisque $\mathbf{R}$ est un intervalle, le théorème des accroissements finis assure que Φ est 7/10-lipschitzienne donc strictement contractante puisque $7/10 < 1$.

2. La proposition est fausse.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $\nabla f(x,y) = (y-1, x-1)$. Ainsi le seul point critique de f est $(1,1)$. De plus, on a
   $$\mathrm{Hess}(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 1$ et le spectre est $\{1, -1\}$. Puisque la Hessienne de f en $(1,1)$ possède à la fois une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive, le seul point critique n'est pas un extremum local.

3. La proposition est vraie.
   En effet, on a d'une part $e^{-0\times 2i\pi/4} = 1$, $e^{-2i\pi/4} = -i$, $e^{-2\times 2i\pi/4} = -1$, $e^{-3\times 2i\pi/4} = i$, et d'autre part $f(0\times 2\pi/4) = 1$, $f(2\pi/4) = 0$, $f(2\times 2\pi/4) = -1$ et $f(3\times 2\pi/4) = -i$. D'où, en notant $F_4(f)$ la transformée de Fourier discrète de f à 4 points,
   $$\begin{aligned}
   (F_4(f))_0 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 0\times 1 + (-1)\times 1 + 0\times 1) = 0 \\
   (F_4(f))_1 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 0\times(-i) + (-1)\times(-1) + 0\times i) = \frac{1}{2} \\
   (F_4(f))_2 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 0\times(-1) + (-1)\times 1 + 0\times(-1)) = 0 \\
   (F_4(f))_3 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 0\times i + (-1)\times(-1) + 0\times(-i)) = \frac{1}{2}.
   \end{aligned}$$
   ou

   La proposition est vraie.
   La fonction s'écrit aussi comme une fonction polynomiale trigonométrique : pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a
   $$f(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right).$$
   La relation entre la transformée de Fourier discrète et l'interpolation trigonométrique donne donc le résultat.

4. La proposition est vraie.
   En effet, on a d'une part $e^{-0\times 2i\pi/4} = 1$, $e^{-2i\pi/4} = -i$, $e^{-2\times 2i\pi/4} = -1$, $e^{-3\times 2i\pi/4} = i$, et, d'autre part, $f(0\times 2\pi/4) = 1$, $f(2\pi/4) = 1$, $f(2\times 2\pi/4) = 1$ et $f(3\times 2\pi/4) = 1$. D'où, en notant $F_4(f)$ la transformée de Fourier discrète de f à 4 points,
   $$\begin{aligned}
   (F_4(f))_0 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1) = 1 \\
   (F_4(f))_1 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 1\times(-i) + 1\times(-1) + 1\times i) = 0 \\
   (F_4(f))_2 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 1 + 1\times(-1)) = 0 \\
   (F_4(f))_3 &= \frac{1}{4}(1\times 1 + 1\times i + 1\times(-1) + 1\times(-i)) = 0.
   \end{aligned}$$