Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Analyse numérique - L3

Devoir n° 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1.

1. Donner lorsqu'elle existe la décomposition LU des matrices qui suivent, et lorsque ce n'est pas possible en donner une décomposition PLU,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour les matrices qui précèdent résoudre en x les systèmes
$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On se donne
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Partant de $x^{(0)}$, quelle approximation de la solution x de $Ax = b$ donne la méthode de Jacobi au bout de 3 itérations ?
2. Quelles sont les tailles de l'erreur et du résidu ?

Exercice 3. Pour les paires (A, b) qui suivent, résoudre le problème de moindres carrés de minimisation en x de $\|Ax - b\|_2^2$ et donner la taille du résidu.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont le rayon spectral est tel que $\rho(A) \leq 1$, la matrice $(\mathrm{I}_n - A)$ est inversible.
2. Le conditionnement en norme 2 de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\sqrt{(3 + \sqrt{5})/(3 - \sqrt{5})}$.

3. La méthode de Gauss-Seidel est convergente pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Partant de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la méthode de la puissance permet de déterminer le rayon spectral de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Partant de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la méthode de la puissance permet de déterminer le rayon spectral de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.