**Préparation au test du 12 décembre**

**Exercice 1** En appliquant plusieurs fois le théorème de l'Hospital, calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x}.$$

**Exercice 2** Soit $f\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

1. Calculer les limites pour $x \to 0^+$, $x \to +\infty$, $x \to 0^-$ et $x \to -\infty$ de $f(x)$.
2. Calculer la dérivée de $f$ dans $\mathbf{R}^*$ et tracer ensuite le graphe de $f$.

**Exercice 3** [cosinus et sinus hyperbolyque]

Pour $x \in \mathbf{R}$ on pose $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

- Démontrer les relations $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
- Démontrer que $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est bijective, strictement croissante. Dessiner les graphes des fonctions cosh et sinh.
- On note $\operatorname{argsinh}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application réciproque de sinh. Démontrer que $\operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (*Indication :* on pourra dériver terme-à-terme la relation $\sinh(\operatorname{argsinh}(x)) = x$ en appliquant la formule de la dérivée de la fonction composée).
- Dessiner le graphe de la fonction argsinh.

**Exercice 4** Soit $a > 0$. Soit $f(x) = \frac{(x-a)^{2/3}}{x}$. Tracer le graphe de la fonction $f$ après avoir déterminé l'ensemble de définition, les limites en $+\infty$ et $-\infty$, la fonction $f'$ et le tableau des variations de $f$. Quel est l'équation de la droite tangente au graphe de $f$ au point $(a, 0)$ ? Quels sont les extréma locaux ?

**Exercice 5** Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Établir si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier vos réponses par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(x+1)) = 0$.
3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(*Indication :* considérer la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$).