**Préparation au test du 7 novembre**

**Exercice 1** On considére la fonction réelle, dépendente du paramère $a \in \mathbf{R}$,

$$f_a(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+2x+a}}.$$

Pour tout $a \in \mathbf{R}$ déterminer l'ensemble de définition $D_a$ de la fonction $f_a$. Préciser notamment les valeurs de $a$ pour lesquelles (i) $D_a = \emptyset$, (ii) $D_a$ est un intervalle.

**Exercice 2**

Soit $f$ la fonction réelle définie par $f(x) = \frac{x+2}{3x+4}$. Déterminer son domaine de définition $D$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$. La fonction $f$ est-elle injective dans $D$ ? Construire l'application $f^{-1}\colon \mathrm{Im}(f) \to D$. Déterminer les ensembles $f([0, +\infty[)$ et $f^{-1}([0, \infty[)$. Représenter graphiquement les fonctions $f$ et $f^{-1}$.

**Exercice 3**

1. Rappeler les définitions de *fonctions paire*, de *fonction impaire* et de fonction *périodique*.
2. Démontrer que toute application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = g + h$, où $g$ est une application paire et $h$ une application impaire. [1]
   Dans le cas de la fonction $f(x) = \max\{x, 0\}$, expliciter les fonctions $g$ et $h$ correspondantes et reprèsenter graphiquement $f$, $g$ et $h$.
3. Soit $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction paire, et telle que la fonction $\psi(x) = \phi(x-1)$ est paire également. Démontrer que $\phi$ est une fonction périodique.

**Exercice 4** On considère l'application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Tracer les graphe de $f$.
2. Trouver les ensembles $f(\mathbf{R}^+)$ et $f^{-1}(\mathbf{R}^+)$.
3. L'application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle inversible ?
4. Trouver deux intervalles $I$ et $J$ tels que $f\colon I \to J$ est inversible. Calculer $f^{-1}\colon J \to I$ et en tracer le graphe.

**Exercice 5**

1. Soient $f$ et $g$ les applications : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$. On pose $\phi = g \circ f$. Montrer que $\phi$ est bornée. Quels sont les points où $\phi$ s'annule ? Et les points où $\phi$ vaut 1 ? À partir des éléments précédents, tracer un graphe approximatif de $\phi$.
2. Mêmes questions pour l'application $\psi = f \circ g$.

1. Indication : considérer le système $\begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(-x) + h(-x) = f(-x) \end{cases}$ et en déduire une expression pour $g(x)$ et $h(x)$.