Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2014

Série d'exercices n°3
Limites et fonctions usuelles

1. Calculez les limites suivantes :

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x-4}$
   (b) $\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2}$
   (c) $\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$
   (d) $\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2})$
   (e) $\lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$
   (f) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$
   (g) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$
   (h) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1))$
   (i) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
   (j) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

2. Fonctions circulaires

   (a) Quelle est la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$?
   (b) La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ admet elle une limite en 0 ?
   (c) Calculez $\lim_{x\to0} x\sin(1/x)$.
   (d) Calculez les limites suivantes :

      i. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$
      ii. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
      iii. $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x}$
      iv. $\lim_{x\to0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$
      v. $\lim_{x\to1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$
      vi. $\lim_{x\to1/2}(2x^2+x-1)\tan(\pi x)$
      vii. $\lim_{x\to0} \frac{\ln(\sin(3x))}{\ln(\sin(2x))}$
      viii. $\lim_{x\to0} \frac{\cos x-1}{x^2}$

3. Exponentielle et logarithme

   (a) Rechercher dans $\mathbb{R}$ les solutions de $2\ln(\frac{x+3}{2}) = \ln x + \ln 3$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant $x+y=55$ et $\ln x + \ln y = \ln 700$
   (c) $\lim_{x\to\infty} \ln(x) - x$.
   (d) $\lim_{x\to\infty} \ln^2(x) - \sqrt{x}$.
   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.
   (f) $\lim_{x\to0} \sqrt{x}\ln^3(x)$.
   (g) $\lim_{x\to\infty} \exp x - x$.

4. Montrez les équivalents suivant :

   (a) $\ln(1+x) \simeq_0 (e^x - 1)$

   (b) $\frac{1-\cos x}{2} \simeq_0 x^2$

   (c) $\frac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x+2} \simeq_0 |x|$

   (d) $E(x) \simeq_\infty x$

5. (a) Soit f une fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) < 1/n$. Montrez que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   (b) Soit f une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut on dire de f ?

6. Les fonctions suivantes sont elles continues ?

   (a) $f(x) = xE(1/x)$ et $f(0) = 1$.

   (b) $f(x) = x^2$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = 2x - 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

   (c) $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ et $f(0) = 1$.

7. On considère les fonctions $f_n(x) = x^n \sin(1/x)$.

   (a) Pour quel n a t-on f_n continue en 0 ?

   (b) Pour quel n a t-on f_n dérivable en 0 ?

   (c) Pour quel n a t-on f_n C^1 en O ?

8. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrez qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 9

1) Donner un équivalent simple de $\operatorname{ch} x$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Vérifier que $x \sim x+1$ mais que $e^x \not\sim e^{x+1}$ quand x tend vers $+\infty$.

3) Donner un équivalent raisonnablement simple de $e^{(x+\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{x})^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

4) Montrer que $\sqrt[3]{1+h}-1 \sim \dfrac{h}{3}$ quand h tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $\sqrt[3]{x^3+x}-x$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 10

Quel est le domaine de définition de la tangente hyperbolique ? Rappeler la forme de son graphe. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x : $\operatorname{th} x = 4$ puis $\operatorname{th} x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11

Montrer que pour tous u et x réels :

$$x = \operatorname{sh} u \iff u = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Exercice 12

Donner un exemple d'angle φ pour lequel $\operatorname{Arcsin}(\sin(\varphi)) \neq \varphi$.

Exercice 13

On s'intéresse aux deux fonctions à valeurs réelles :

$$f : x \mapsto \cos(\operatorname{Arccos}(x)) \text{ et } g : \varphi \operatorname{Arccos}(\cos(\varphi)).$$

Préciser leurs ensembles de définitions respectifs D_f et D_g, puis les ensembles image $f(D_f)$ et $g(D_g)$. Les applications f et g sont-elles injectives ?

Exercice 14

En utilisant la relation $\sin\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$, montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2}$.