Université Lyon 1 — Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année

UE Analyse I : les réels et les fonctions — Année 2013-2014

Feuille 3. Équations différentielles du premier ordre

Intégration habituelle et résolution des équations différentielles

Exercice 1. Trouver les solutions générales des équations suivantes, puis les solutions uniques qui satisfont aux conditions initiales données dans chacun des cas.

a) $y' = \cos(x)$, condition initiale : $y(0) = 3$.

b) $y' = 8xe^{2x}$, $\quad y(0) = 3$.
[Indication : Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ dans $y(x) = (ax + b)e^{2x} + c$.]

c) $y' = \mathrm{sh}(x)$, $\quad y(0) = -2$.

d) $y' = 6x^2 - 6x + 5$, $\quad y(2) = 9$

e) $\sin^2(x)y' = 1$, $\quad y(\pi/4) = 3$

f) $\sin(x)\, y' = \cos x$, $\quad y(-\pi/2) = \ln 2$

[Indication : Se rappeler que la dérivée de $\ln(|u(x)|)$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.]

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 2. On va chercher à résoudre $y' + 2y = xe^{-x}$ avec $y(0) = 2$.

a) Résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$.

b) Chercher une solution de l'équation soit sous la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$ (déterminer les coefficients a et b en utilisant l'équation différentielle à résoudre), soit au moyen de la méthode de variation de la constante (au choix).

c) En déduire toutes les solutions de l'équation proposée, puis la solution satisfaisant à la condition initiale.

Exercice 3. Résoudre des problèmes suivants (avec des méthodes similaires à celles de l'exercice précédent) :

a) $y' - 3y = (1 - 3x)e^{2x}$, $\quad y(0) = -2$

b) $y' - 3y = 2e^{3x}$, $\quad y(0) = -2$

c) $y' + 2y = 2xe^{-2x}$, $\quad y(1) = 0$

Équations différentielles linéaires

Exercice 4.

a) Trouver les solutions maximales des équations homogènes suivantes

1. $x\, y' - y = 0$ $\quad$ 2. $x\, y' + y = 0$.

[On pourra commencer par calculer $y(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.]

b) Spécialiser les solutions pour $y(1) = 2$. Déterminer en particulier le domanine de défintion de votre solution explicitement.

c) Montrer qu'il n'y a pas de solutions pour $y(0) = 2$. Pourquoi cela n'est-il pas une contradiction avec le théorème de Picard-Lindelöf ?

d) Utiliser les resultats de a) pour résoudre les problèmes suivants.

1. $x\,y' - y = 1,\ y(1) = 2.$ 2. $x\,y' + y = 1,\ y(1) = 2.$

[On cherchera des solutions particulières « évidentes » de l'équation non homogène.]

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes (trouver la solution générale, puis la spécifier grâce aux conditions initiales) :

a) $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = 1, \qquad y(0) = 2$

b) $xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad y(1) = \ln(2)$

c) $xy' + 2y = \dfrac{3\exp(3x)}{x}, \qquad y(1) = e^3$

d) $xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{3\exp(3x)}{x}, \qquad y(1) = \ln(2) + e^3$

Équations différentielles à variables séparées

Exercice 6.

a) Trouver la solution générale de l'équation
$$y' = e^y \sin(x)\,.$$

b) Spécialiser pour la condition initiale $y(0) = -\ln(3)$. Déterminer le domaine de définition (maximal) de cette solution.

c) Cette fois-ci, donner la solution de l'équation différentielle ci-dessus pour $y(0) = 0$. Déterminer son domaine de définition (maximal).

Exercice 7.

a) Soit $f(x) = \operatorname{cotan} x$. Déterminer D_f et calculer f' en utilisant la définition de la fonction cotan.

b) L'équation différentielle $\sin^2(x)\,y' = \sin^2(y)$ est-elle linéaire ?

c) Séparer et intégrer cette équation avec la condition initiale $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

d) Trouver l'unique solution de $\sin^2(x)\,y' = \sin^2(y)$ telle que $y(\pi) = \pi$.

e) Trouver l'unique solution de cette équation telle que $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$.

Modélisation

Exercice 8. On considère une espèce dont la population à l'instant t est $N(t)$.

a) Dans le modèle de Malthus, le taux d'accroissement de la population est proportionnel à la population. Le facteur de proportionnalité est la différence k entre le taux de natalité et celui de mortalité. Donner l'équation satisfaite par $N(t)$.

b) Le modèle de Verhulst (connu aussi comme « modèle logistique ») prédit que le taux k n'est pas constant, mais est en réalité proportionnel à la différence entre la population maximale N^* que supporte la planète et la population à l'instant t.

1. Ecrire l'équation satisfaite par N.
2. Poser $y = \dfrac{1}{N}$ et calculer N' en fonction de y et y'.
3. Écrire l'équation satisfaite par y.

c) Y a-t-il un problème avec ces modèles ?