Université Claude Bernard Lyon 1 Licence Automne 2014 (Analyse 1)

Série d'exercices 4
Continuité, dérivabilité

Continuité

Exercice 1
Soit $\mathcal{D}_f$ une partie de $\mathbf{R}$ et f une application de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbf{R}$.

1) Soit $I =]a, b[$ (où a et b peuvent être infinis) un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{D}_f$. On suppose la restriction de f à $]a, b[$ continue sur $]a, b[$. Montrer que f est continue en tout point de $]a, b[$.

2) Donner un contre-exemple montrant que la question 1) serait fausse pour un intervalle fermé $[a, b]$.

3) Soit $I = [a, b]$ (où $a < b$) ou $I = [a, b[$ (où b est fini ou infini) un intervalle fermé à gauche inclus dans $\mathcal{D}_f$ et non réduit à un singleton. On suppose la restriction de f à I continue. Montrer que f est continue à droite en a.

4) Application : on définit f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$, $f(x) = \cos x$ si $x = 0$ et $f(x) = (x + 1)^7$ si $0 < x$. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2
Soit $f :] - \infty, 0[\cup[1, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x$ si $x < 0$ et $f(x) = x - 1$ si $1 \leq x$.
Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(y) = y$ si $y < 0$ et $g(y) = y + 1$ si $0 \leq y$.

1) Tracer leurs graphes respectifs, et constater qu'ils se déduisent l'un de l'autre par une symétrie.

2) Ces applications sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

3) Pour chacune de ces applications, préciser si elle est ou non continue sur son domaine de définition.

Exercice 3
Montrer avec précision que si f est continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 4
Pour n entier avec $n \geq 2$, on considère l'application polynomiale f_n, de $\mathbf{R}$ veres $\mathbf{R}$, définie pour tout x réel par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1) Montrer qu'il existe un unique élément ξ_n de $\mathbf{R}^{+*}$ tel que $f_n(\xi_n) = 0$.

2) On considère la suite de nombres réels $(\xi_n)_{n\geq 2}$. Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5
Vrai ou faux ?

1) Si f est continue d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.

2) Si f est continue d'un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbf{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.

3) Si f est continue d'un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbf{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.

4) Si f est continue d'un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbf{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni forcément borné.

Exercice 6

1) Soit f une application continue et périodique de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
Montrer que f est bornée.

2) (Application de la précédente)
Calculer (sans présumer son existence !) la limite :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t(\sin^8 t + \cos^{14} t)}$$

Dérivabilité

Exercice 7

Préciser pour chacune des fonctions suivantes en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1) $f(x) = \cos(\cos x)$.

2) $g(x) = \sqrt{|\sin x|}$.

3) $h(x) = \sqrt{1 + \cos x}$.

Exercice 8

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0\,; \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,; \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 9

Pour chacune des expressions $y(t)$ ci-dessous, calculer $\dfrac{dy}{dt}$:

1)	$t^4 + 3t^2 - 6$	2)	$6t^{7/2} + 4t^{5/2} - 2t$	3)	$\sqrt{3t} + \sqrt[3]{t} + \dfrac{1}{t}$	4)	te^t	5)	$t^2 e^t$	6)	$t(t+3)e^t$
7)	$t \sin t \ln t$	8)	$\dfrac{5-t}{5+t}$	9)	$\dfrac{t^3}{1+t^2}$	10)	$\dfrac{t^3+1}{t^2-t-2}$	11)	$\dfrac{\ln t}{t^3}$	12)	$\dfrac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}$
13)	$\dfrac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{t}}$	14)	$\dfrac{\cos t}{\sin t}$	15)	$\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$.						

Exercice 10

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

1) $f(x) = e^{3x}$	2) $f(x) = \cos(5x)$	3) $f(x) = \ln(2x)$	4) $f(x) = \ln(\vert 2x\vert)$
5) $f(x) = \ln(-2x)$	6) $f(x) = (1-x)^{7/3}$	7) $f(x) = \sin(\cos x)$	8) $f(x) = \sin(\cos(3x))$
9) $f(x) = \ln(\sin^2 x)$	10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$	11) $f(x) = e^{-x^2}$	12) $f(x) = 2^{\ln x}$
13) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+4x}}{1+2\sqrt{1+x}}$	14) $f(x) = \ln(\vert e^{2i\pi x}\vert)$.		

Exercice 11

Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ \sin x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1) Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbf{R}^*$ en calculant sa dérivée.

2) f est-elle dérivable en 0 ?

3) f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 12

Pour chacune des applications f, g et h de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définies comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

déterminer l'ensemble des points où elle est continue, puis l'ensemble des points où elle est dérivable, et enfin l'ensemble des points où sa dérivée est elle-même continue.

Exercice 13

1) Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2) En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{Arctan}(\frac{4}{3}) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Exercice 14

1) Montrer que pour tous réels x et y :

$$|\cos y - \cos x| \leq |y - x|.$$

2) Dans cette question on note :

$$A = \{\frac{|\cos y - \cos x|}{|y-x|} \mid x,\, y \in \mathbf{R}, x \neq y\}.$$

Montrer que l'ensemble A est borné, puis qu'il admet une borne supérieure et une borne inférieure. Déterminer celles-ci. L'ensemble A admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ? Déterminer l'ensemble A.

Exercice 15

Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$0 \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Comment se comporte la suite (H_n) de terme général $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini ?

Exercice 16

Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ une fonction trois fois dérivable.

1) On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule quelque part dans $]0,1[$.

2) On suppose ici que $f(0) = f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = f(1) = 0$. Même conclusion qu'au 1).

3) On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Même conclusion.

Exercice 17

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$; soit x_0 un point de $]a,b[$.
Soit f de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,x_0[\cup]x_0,b]$.
On suppose que quand $x \to x_0$ $(x \neq x_0)$, $f'(x) \to l$, où l est un réel fixé.
Montrer que f est dérivable sur $[a,b]$ et que $f'(x_0) = l$.
On pourra (ce n'est pas la seule façon de faire) appliquer la règle de L'Hopital aux fonctions $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ et $x \mapsto x - x_0$.

Exercice 18

Soit $a < b$ deux réels.
Existe-t-il une fonction dérivable f de $[a,b[$ vers $\mathbf{R}$ telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\lim_b f = +\infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?

Exercice 19
Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ une application continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0)=f'(1)=0$.
1) Montrer qu'il existe un α dans $]0,1[$ tel que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$

En déduire que $f(\alpha)=\alpha$.
2) On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0,1[$ tel que $|f''(\beta)|\geq 4$.

Exercice 20
Soit f la fonction définie par $f(x)=x\ln x-x$.
1) En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montre rque pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\ln n\leq f(n+1)-f(n)\leq \ln(n+1).$$

2) En déduire que pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n\leq f(n+1)+1\leq \ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n+1).$$

3) En déduire que pour tout $n\geq 1$, on a :

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n\leq n!\leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Exercice 21
Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
Soit q une application continue de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$ telle que :
(i) Pour tout x de $[a,b]$, $q(x)\leq 1$.
Soit enfin f de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$ une application deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle que :
(ii) Pour tout x de $]a,b[$, $f(x)\neq 0$;
(iii) $f(a)=f(b)=0$;
(iv) Pour tout x de $[a,b]$, $f''(x)+q(x)f(x)=0$.
Enfin, pour tout x de $[a,b]$, on pose :

$$w(x)=f'(x)\cos[\frac{\pi}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})]+f(x)\frac{\pi}{b-a}\sin[\frac{\pi}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})].$$

1) Montrer que $w(a)=w(b)=0$.
2) Montrer que w est dérivable sur $[a,b]$ et que pour tout x de $[a,b]$,

$$w'(x)=[\frac{\pi^2}{(b-a)^2}-q(x)]f(x)\cos[\frac{\pi}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})].$$

3) Pour tout x de $]a,b[$, démontrer l'inégalité :

$$\cos[\frac{\pi}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})]>0.$$

4) Déduire de ce qui précède que :

$$b-a\geq\pi.$$

5) On suppose dans cette question qu'on a en outre :
pour tout x de $[a,b]$, $0<q(x)\leq 1$.
et
pour tout x de $]a,b[$, $f(x)>0$.
Montrer qu'il existe un point c de $]a,b[$ et un seul tel que $f'(c)=0$.
En déduire l'allure du graphe de f sur $[a,b]$.