Cours d'Analyse I : les réels et les fonctions

Lorenzo Brandolese

Université Lyon 1
Institut Camille Jordan – CNRS UMR 5208 FRANCE

Automne 2014 - Licence L1

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^*$, etc.
- $\forall$, $\exists$, etc.
- $\in$, $\subset$, etc.

[Détails au tableau]

Définition (L'ensemble des nombres réels)

$$\mathbb{R} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{ m,\alpha_1\alpha_2\ldots \mid m \in \mathbb{Z}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \{0,\ldots,9\},$$
$$\text{avec les } \alpha_j \text{ pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang} \Big\}.$$

- Pour simplifier les notations on écrit, par exemple

$$4,23 \overset{\text{déf}}{=} 4,23000\ldots \in \mathbb{R}.$$

- D'après notre définition $5,32999\ldots$ n'est pas un nombre réel (même si on pourrait lui donner un sens en identifiant cet écriture au nombre réel $5,33$.

Définition (L'ensemble des nombres rationnels)

$$\mathbb{Q} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \right\}$$

L'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ repose sur des faits bien connus :

- Toute fraction $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$) s'écrit bien sous la forme
$$\frac{p}{q} = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$
  L'algorithme de la division permet de calculer, l'un après l'autre, l'entier $m \in \mathbb{Z}$ et les chiffres $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.
- Après un certain rang, un groupe de chiffres se repète indéfiniment (le dévéloppement d'un nombre rationnel est périodique).
- Ce développement ne se termine jamais par $999\dots$
- Réciproquement, on peut toujours convertir un nombre ayant un développement décimal périodique sous la forme de fraction.

[Explications supplémentaires au tableau]

Définition

Une relation d'ordre sur un ensemble X est une relation $\leq$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(o1) $\forall x \in X, \, x \leq x$.

(o2) $\forall x, y \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

(o3) $\forall x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Un ensemble X, muni d'une relation d'ordre $\leq$, est dit totalement ordonné lorsqu'on a aussi

(o4) $\forall x, y \in X$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

En supposant connue la relation d'ordre usuelle $\leq$ dans $\mathbb{Z}$, on **définit** facilement une relation d'ordre (compatible) $\leq$ dans $\mathbb{R}$.
[Détails au tableau]
Conclusion :

$(\mathbb{R}, \leq)$ *est un ensemble totalement ordonné.*

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est borné supérieurement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, a \in A, \quad a \leq M.$$

On dit alors que M est un majorant pour A. Si de plus $M \in A$ on dit que M est le maximum de A (ou "le plus grand élément de A") :

$$M = \max(A).$$

- Lorsqu'il existe, le maximum est unique [pourquoi ?].

Définition

On dit que A est borné inférieurement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, a \in A, \quad m \leq a.$$

On dit alors que m est un minorant pour A. Si de plus $m \in A$ on dit que m est le minimum de A (ou "le plus petit élément de A") :

$$m = \min(A).$$

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A borné supérieurement. Supposons que l'ensemble de tous les majorants de A possède un minimum $S \in \mathbb{R}$. Ce nombre S s'appelle la borne sup de A :

$$S = \sup(A) \overset{\text{déf}}{=} \min\{M \in \mathbb{R} \,|\, M \text{ majorant de } A\}.$$

Si l'ensemble A possède un maximum : $\sup(A) = \max(A)$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A borné inférieurement. Supposons que l'ensemble de tous les minorants de A possède un maximum $I \in \mathbb{R}$. Ce nombre I s'appelle la borne inf de A :

$$I = \inf(A) \overset{\text{déf}}{=} \max\{m \in \mathbb{R} \,|\, m \text{ minorant de } A\}.$$

Noter que $\sup(A)$ et $\inf(A)$, s'ils existent, sont uniques.

Théorème (admis)

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{R}$.

Exercice

Déduire le corollaire suivant à partir du théorème :

Corollaire

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et borné inférieurement possède une borne inf dans $\mathbb{R}$.

Indication : considérer l'ensemble $-A \overset{\text{déf}}{=} \{-a \,|\, a \in A\}$.

Conventions :
On écrit $\sup A = +\infty$ lorsque $A \neq \emptyset$ n'est pas borné supérieurement.
Parfois on pose $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

Question

Vrai ou faux ?

1. Tout ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{Z}$.
2. Tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{Q}$.
3. Tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans $\mathbb{R}$.

Règle pratique pour le calcul de sup et inf

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un ensemble borné supérieurement et $S \in \mathbb{R}$. On a

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A, & a \leq S \\ \forall\, \epsilon > 0, & \exists\, a \in A \text{ tel que } S - \epsilon < a. \end{cases}$$

Dém. Au tableau.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un ensemble borné inférieurement et $I \in \mathbb{R}$. On a

$$I = \inf A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A, & I \leq a \\ \forall\, \epsilon > 0, & \exists\, a \in A \text{ tel que } a < I + \epsilon. \end{cases}$$

Somme et produit de nombres réels.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, la définition rigoureuse de

$$x + y$$

et de

$$x \cdot y$$

à partir de leur écriture décimale nécessite l'utilisation de la propriété du sup ...

[Détails au tableau].

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, *c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{R}$, muni des opérations $+$ et $\cdot$ et de la relation d'ordre $\leq$, a la structure de corp commutatif totalement ordonné.*

[Détails au tableau].

Question

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ est-il un **corp commutatif totalement ordonné** ?
2. Et $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$?
3. Et $\mathbb{C}$ (nombres complexes) ?

Théorème ($\mathbb{R}$ est archimédien)

Pour tout $x > 0$, *et tout* $y \in \mathbb{R}$,

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad nx > y.$$

Dém. On peut se ramener au cas $x = 1$ [pourquoi ?]. Ensuite, si $y < 0$ il suffit de prendre $n = 0$. Si $y = 0$ il suffit de prendre $n = 1$. Si $y > 0$ est de la forme $y = m, \alpha_0\alpha_1 \ldots$, il suffit de prendre $n = m + 1$. $\square$

Théorème (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, *avec* $x < y$,

$$\exists\, q \in \mathbb{Q} \quad \textit{tel que} \quad x < q < y.$$

Dém. [Au tableau].

Théorème (existence des racines)

Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique solution $x \in \mathbb{R}^+$ de l'équation.

$$x^n = a.$$

Cette solution est notée $x = \sqrt[n]{a}$ ou sinon $x = a^{1/n}$.

Dém. [Admise : voir les approfondissements].

- Le théorème ci-dessus **ne permet pas** de définir $\sqrt{-7}$, ou $\sqrt[4]{-3}$, ou encore $(-\pi)^{1/2}$ (écritures à proscrire).

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier **impair** et $a \in \mathbb{R}^+$. On pose
$\sqrt[n]{-a} = (-a)^{1/n} \overset{\text{déf}}{=} -\sqrt[n]{a}$.

Définition (Valeur absolue)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et aussi $|x| \geq \pm x$.
- Si $M \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$.
- Si $M \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \geq M \iff x \leq -M$ ou $x \geq M$.
- $|x - a|$ exprime la distance entre les réels x et a.

Proposition

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \text{“\textit{inégalité triangulaire}”},$$

et

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y|.$$

Dém. [Au tableau].

Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de $y = f(x)$?

Définition (parties positives et négatives)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, 0).$$

Propriétés

- $x^+ + x^- = \dots \quad ??$
- $x^+ - x^- = \dots \quad ??$

Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de $y = f(x)$?

Définition (parties positives et négatives)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{déf}}{=} \max(-x, 0).$$

Propriétés

- $x^+ + x^- = |x|$
- $x^+ - x^- = x$

Définition (Partie entière)

Soit $x = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ un nombre réel. La partie entière de x (notée $[x]$ ou $E(x)$) est définie par

$$[x] \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} m & \text{si } x \geq 0 \\ m-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, $[x]$ est **le plus grand entier $\leq x$.**

Propriétés : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $[x] \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x : $\quad [x] \leq x < [x] + 1$.

[Au tableau : graphe de $[x]$, $|x|$, x^+ et x^-].

Problème : on souhaite démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe des démonstrations par récurrence :

- **Si** $\mathcal{P}_0$ *est vraie,* *[initialisation]*
- **et si**, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, *[hérédité]*

Alors la propriété $\mathcal{P}_n$ *est vraie quel que soit* $n \in \mathbb{N}$.

Question

Comment calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de n premiers nombres impairs,

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) \text{ ?}$$

Définition (Factoriels et puissances)

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0! \overset{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \overset{\text{déf}}{=} (n-1)! \cdot n$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$a^0 \overset{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \overset{\text{déf}}{=} a \cdot a^{n-1}.$$

Ceci donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

et

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}.$$

Définition (Coefficient binomial)

Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On pose

$$\binom{n}{k} \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{si } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriétés [Exercice]

- En particulier, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.
- Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Théorème (formule du binôme)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dém. [Au tableau].

Corollaire (Inégalité de Bernouilli)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dém. [Au tableau].

Définition (suite)

Une suite réelle est une application

$$x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$

Notations alternatives pour les suites : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement (x_n).

On appelle aussi "suite réelle " les applications à valeur réelles dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.

Voici trois manières différentes de noter la même suite :

- La fonction $x\colon \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\} \to \mathbb{R}$ définie par $x(n) = n^2$.
- La suite $(n^2)_{n\geq 4}$.
- La suite $(16, 25, 36, \ldots)$.

Définition (limite d'une suite)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite (x_n) converge si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (appelé limite de la suite), tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$, ou $x_n \to \ell$.
Une suite **non convergente** est dite divergente.

Certaines suites divergentes peuvent avoir une limite infinie :

Définition (limite infinie)

On dit que la suite (x_n) diverge à l'infini si :

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq N, \quad |x_n| \geq M.$$

On écrit dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, ou $x_n \to \infty$.

Question

Comment donner une sens aux écritures

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ ?$$

Exercice

En utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, démontrer rigoureusement que

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Théorème (Unicité de la limite)

Si la limite ℓ d'une suite réelle existe (finie ou infinie), elle est unique.

Dém. [Au tableau]

Terminologie : une suite réelle (x_n) est dite

- majorée, si : $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq M$.
- bornée, si :$\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n| \leq M$.
- croissante, si :$\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq x_{n+1}$.

Ne jamais intervertir $\exists \ldots$ et $\forall \ldots$ Par exemple,

$$\text{“}\,\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \textit{ on a } x_n \leq M\,\text{”}$$

n'est pas la même chose que

$$\text{“}\,\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, M \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que on a } x_n \leq M\,\text{”}$$

Proposition

Toute suite réelle convergente est bornée.

Question

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad (x_n)$ non bornée.
2. (x_n) non bornée $\quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Théorème (des gendarmes)

Soient (a_n), (b_n) et (x_n) trois suites telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

et

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$$

(avec $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$).
Alors la suite (x_n) **possède une limite** *et l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

Dém. Au tableau.

Question

La suite $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$ est-elle convergente ?

Théorème (opération avec les limites)

Soient (x_n) *et* (y_n) *deux suites réelles* **convergentes** *respectivement vers* ℓ *et* ℓ'. *Alors les suites* $(x_n + y_n)$ *et* $(x_n y_n)$ *sont convergentes et*

$$x_n + y_n \to \ell + \ell', \qquad \text{et} \qquad x_n y_n \to \ell\ell'.$$

De plus, si $y_n \neq 0$ *pour tout* n *:*

- $\ell' \neq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$
- $\ell \neq 0,\; \ell' = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$

Question

Comment calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6} \quad ?$$

Sur la démonstration du théorème précédent

Question (autour de la définition de limite)

Soit (x_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Comparer les trois écritures suivantes :

1. $$\forall\,\epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

2. $$\forall\,\epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < 2\epsilon.$$

3. $$\exists C > 0, \quad \forall\,\epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < C\epsilon.$$

Sont-elles équivalentes ?

[Dem. du théorème au tableau]

Théorème (opérations avec des limites infinies)

Soient $x_n \to \ell$ et $y_n \to \ell'$.

- *Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$, alors $x_n + y_n \to +\infty$.*
- *Si $\ell > 0$ et $\ell' = +\infty$, alors $x_n y_n \to +\infty$*
- *Si $\ell < 0$ et $\ell' = \infty$, alors $x_n y_n \to -\infty$*
- *Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = \infty$, alors $\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$*
- *Si $\ell = \ell' = +\infty$, alors $x_n + y_n \to +\infty$ et $x_n y_n \to +\infty$.*

Tous les cas ne sont pas couverts ! Par exemple :

- $x_n \to 0$ et $y_n \to \infty \implies x_n y_n \to ??$ $\quad [0 \cdot \infty]$
- $x_n \to +\infty$ et $y_n \to -\infty \implies x_n + y_n \to ??$ $\quad [\infty - \infty]$
- $x_n \to +\infty$ et $y_n \to +\infty \implies \dfrac{x_n}{y_n} \to ??$ $\quad [\frac{\infty}{\infty}]$
- $x_n \to 0$ et $y_n \to 0 \implies \dfrac{x_n}{y_n} \to ??$ $\quad [\frac{0}{0}]$

Ces cas de figure sont des exemples de formes indeterminées.

Utilisation des limites pour le calculs de sup et inf.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide.

- $\sup(A) = +\infty$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to +\infty$.
- $\sup(A) = S \in \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to S$ *et* S *est un majorant pour* A.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide.

- $\inf(A) = -\infty$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to -\infty$.
- $\inf(A) = I \in \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $(a_n) \subset A$ *telle que* $a_n \to I$ *et* I *est un minorant pour* A.

Dém. [Au tableau]

Les suites monotones sont les suites réelles croissantes ou décroissantes.

Théorème (limites des suites monotones)

Toute suite monotone (x_n) possède une limite. Plus précisément :

- *Si (x_n) est croissante et majorée alors (x_n)* **converge** *vers $S = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*
- *Si (x_n) est croissante et non majorée alors (x_n) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*
- *Si (x_n) est décroissante et minorée alors (x_n)* **converge** *vers $I = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*
- *Si (x_n) est décroissante et non minorée alors (x_n), alors $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Dém. [Au tableau].

Proposition (suites adjacentes)

Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante, telles que $x_n \leq y_n$ et $y_n - x_n \to 0$. Alors (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

Dém. [Au tableau.]

Exercice

Soient a, b deux réels, avec $a < b$. Posons

$$x_0 = \sqrt{ab}, \qquad y_0 = \frac{a+b}{2}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Démontrer que ces suites sont adjacentes. Ces suites sont alors convergentes [mais on ne sais pas en expliciter la limite !]

Définition (suite géométrique)

Une suite de la forme $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $a \in \mathbb{R}$ est dite géométrique.

Pour $a = 1$, on obtient la suite constante $(1, 1, \ldots)$.
Pour $a = -1$, la suite alternée divergente $(1, -1, 1, -1, \ldots)$.

Question

Que peut-on dire de a^n pour $n \to \infty$ dans les autres cas ?

Théorème

- $a > 1 \implies a^n \to +\infty.$
- $-1 < a < 1 \implies a^n \to 0.$
- $a < -1 \implies a^n \to \infty.$

Dém. [Au tableau.]

Deux théorèmes de comparaison

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} +\infty, & si\ a > 1 \\ 0, & si\ -1 < a < 1 \\ \infty, si\ a < -1. \end{cases}$$

Noter que la valeur de p n'affecte pas ces limites.
Le cas $a = \pm 1$ se traite facilement.
[Détails au tableau].

Sommes partielles d'une suites géométrique

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & si\ a \neq 1 \\ n+1 & si\ a = 1. \end{cases}$$

[Détails au tableau]

Exercice (série géométrique)

En fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, étudier la limite $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)$

Le nombre e

Nous définirons plus tard $e \overset{\text{déf}}{=} \exp(1)$, après avoir introduit la fonction ln et la fonction exp.
Signalons ici deux caractérisations remarquables de ce nombre réel e :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

et

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}.$$

- La deuxième formule permet de démontrer que e est **irrationnel** et que $e \simeq 2,718\ldots$
- La première formule met en évidence qu'il y a une autre "forme indéterminée" (notée $[1^\infty]$) :

$$x_n \to 1, \quad \text{et} \quad y_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \to ??$$

[Voir les TD et les approfondissements pour plus de détails.]

Définition

Étant donnée une suite (x_n), on appelle suite extraite (ou sous-suite) de (x_n) toute suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction **strictement croissante**.

Notation alternative : $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (cela est cohérent, car ϕ définit une suite d'entiers, la suite croissante $n_k = \phi(k)$).

Remarque. Si $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une autre fonction strictement croissante, $x_{\psi\circ\phi(n)} = x_{\psi(\phi(n))}$ sera alors une nouvelle extraction (une sous-sous-suite) de la suite de départ. Ou avec la notation alternative, $(x_{n_{k_\ell}})$.

Proposition

Si (x_n) est une suite convergente vers ℓ, alors toute suite extraite de (x_n) converge vers ℓ.

Dém. [Au tableau].

Question

Vrai ou faux ?

- Si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent, alors (x_n) converge.
- Si $x_{2n} \to \ell$ et $x_{2n+1} \to \ell$, alors $x_n \to \ell$.
- Si (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent, alors (x_n) converge.

Théorème (de Ramsey)

Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Dém. [Voir les approfondissents]

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Dém. [Au tableau]

Définition

Une suite réelle est dite de Cauchy si

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad \forall\, m, m \geq n_0 \quad \text{on a} \quad |u_m - u_n| < \epsilon.$$

Lemme

Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème ($\mathbb{R}$ est complet)

Dans $\mathbb{R}$, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Dém. [Au tableau]

Définition

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit complet s'il a la propriété que toute suite de Cauchy (x_n) contenue dans A converge vers une limite $\ell \in A$.

Question

- $\mathbb{Q}$ est-il complet ?
- Et $\mathbb{Z}$?

Exercice (série harmonique)

Vérifier que la suite

$$S_n \stackrel{\text{déf}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas de Cauchy et conclure que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.