Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2014

Série d'exercices n$^\circ$1
Les réels

Exercice 1 : autour de $\sqrt{2}$

1. On considère $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
   (a) Montrer par l'absurde que $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (b) De la même manière, montrer que si $r \neq 0$ alors $rx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Est-ce que $\sqrt{2}$ est rationnel ? Supposons que oui et écrivons $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, où p et q sont premiers entre eux.
   (a) Elever l'égalité précédente au carré.
   (b) Etudier la parité de p^2.
   (c) Etudier la parité de q^2.
   (d) Conclure sur la rationalité de $\sqrt{2}$.
3. Considérons deux rationnels r et r', tels que $r < r'$. Notons $x = r + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$.
   (a) Montrer que $x \in]r, r'[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $x\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (c) Quel résultat général peut-on conclure de cela ?

Exercice 2 : rationnels ou décimal ?

1. Soit $A_n = 0,201420142014...2014$ (n fois). Ecrire A_n sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
2. Soit $A = 0,201420142014...$ (une infinité de fois). Ecrire A sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
3. Même question que la 2. pour le nombre rationnel
$$P = 0,11111... + 0,22222.... + 0,33333 + ... + 0,99999....$$

Exercice 3 : Calcul de racine

Montrer que le nombre réel
$$\gamma = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$
est une entier naturel que l'on déterminera.
On en profitera pour rappeler la formule $(a + b)^3$.

Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2014

Série d'exercices n°1
Les réels

Exercice 1 : autour de $\sqrt{2}$

1. On considère $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
   (a) Montrer par l'absurde que $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (b) De la même manière, montrer que si $r \neq 0$ alors $rx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Est-ce que $\sqrt{2}$ est rationnel ? Supposons que oui et écrivons $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, où p et q sont premiers entre eux.
   (a) Elever l'égalité précédente au carré.
   (b) Etudier la parité de p^2.
   (c) Etudier la parité de q^2.
   (d) Conclure sur la rationalité de $\sqrt{2}$.
3. Considérons deux rationnels r et r', tels que $r < r'$. Notons $x = r + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$.
   (a) Montrer que $x \in]r, r'[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $x\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (c) Quel résultat général peut-on conclure de cela ?

Exercice 2 : rationnels ou décimal ?

1. Soit $A_n = 0,201420142014...2014$ (n fois). Ecrire A_n sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
2. Soit $A = 0,201420142014...$ (une infinité de fois). Ecrire A sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
3. Même question que la 2. pour le nombre rationnel
$$P = 0,11111... + 0,22222.... + 0,33333 + ... + 0,99999....$$

Exercice 3 : Calcul de racine

Montrer que le nombre réel

$$\gamma = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

est une entier naturel que l'on déterminera.
On en profitera pour rappeler la formule $(a + b)^3$.

Exercice 4 : racine et valeur absolue

Le but de cet exercice est de trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(1) \quad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

1. Montrer que x est solution de (1) si et seulement si
$$(2) \quad |\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1.$$
2. Trouver les solutions $u \in \mathbb{R}$ de l'équation
$$(3) \quad |u-2|+|u-3|=1.$$
3. Conclure

Exercice 5 : autour des valeurs absolues

1. Soient x et y deux réels. Démontrer les inégalités suivantes
   (a) $|x|-|y| \leq |x-y|$.
   (b) $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$.
   (c) $1+|xy-1| \leq (1+|x-y|)(1+|y-1|)$.
   (d) $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$A(x)=\frac{|x|}{1+|x|}.$$
   Montrer que quels que soient les réels x et y, on a $A(x+y) \leq A(x)+A(y)$.

Exercice 6 : autour des parties entières

1. Soient x et y deux réels. Démontrer les égalités et inégalités suivantes
   (a) $E(x+1)=E(x)+1$,
   (b) $E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$,
   (c) $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$,
   (d) $E(\frac{x}{2})+E(\frac{x+1}{2} = E(x)$. Indication : pour cette dernière égalité, on distinguera les cas $E(x)$ pair et $E(x)$ impair.
   (e) On suppose en plus que $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$E(\frac{1}{n}E(nx))=E(x).$$

Exercice 7 : minimum et maximum

Soient x et y deux réels.

1. Montrer que
$$\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et } \min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$
2. Soit $z \in \mathbb{R}$. Peut-on trouver une formule pour $\max(x,y,z)$?

Exercice 8 : inf, sup

Soit $A = \{x^2 + y^2;\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ xy = 1\}$.

1. Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.
2. A possède-t-elle une borne supérieure ?

Exercice 9 : inf, sup- vrai, faux

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{array}{lllllll} -A & = & \{-a; a \in A\}, & \quad & A+B & = & \{a+b; a \in A, b \in B\}, \\ x+A & = & \{x+a; a \in A\}, & \quad & AB & = & \{ab; a \in A, b \in B\} \end{array}$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les justifier, si elles sont fausses, donner un contre exemple.

1. si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$,
2. si $A \subset B$ alors $\inf A \leq \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\inf(-A) = -\sup A$,
6. $\sup(x + A) = x + \sup A$,
7. $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Exercice 10 : défis

Quelques exercices un peu plus difficiles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$
   (b) En déduire une partie entière du nombre réel
   $$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10000}} +$$
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que
   $$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$
   est un entier pair.
   (b) En déduire que $E((2 + \sqrt{3})^n)$ est un entier impair.
4. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par
   $$A = \left\{ \frac{m}{mn+1}; m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$
   Montrer que A possède une borne supérieure et une borne inférieure et les calculer.