Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2014

Série d'exercices n°2
Les fonctions

Exercice 1 : images et antécédents

On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$

1. Déterminer les images directes suivantes :
$$\text{a. } f(\{-1,2\}), \quad \text{b. } f([-3,-1]), \quad \text{c. } f([-3,1]).$$
2. Déterminer les images réciproques suivantes :
$$\text{a. } f^{-1}(\{4\}), \quad \text{b. } f^{-1}(\{-1\}), \quad \text{c. } f^{-1}([-1,4]).$$

Exercice 2 : domaine de définition

1. Calculer le domaine de définition des fonctions f définies de la façon suivante :
$$\text{a. } f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}, \quad \text{b. } f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad \text{c. } f(x) = \sqrt[4]{x^2-5x}\,.$$
2. Donner le domaine de définition et l'image directe de ces domaines par les fonctions f suivantes
$$\text{a. } f(x) = \sqrt{4-3x^2}, \quad \text{b. } f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \text{c. } f(x) = 1+\sin(x), \quad \text{d. } f(x) = \tan(2x).$$

Exercice 3 : parité

1. Après avoir donné leur domaine de définition, dire si les fonctions f définies de la façon suivante sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.
$$\text{a. } f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2, \quad \text{b. } f(x) = x^3 - x^7, \quad \text{c. } f(x) = \cos(x^2), \quad \text{d. } f(x) = 1+\sin(x).$$
2. Même question pour la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$.
Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f possède un axe de symétrie qu'il faudra calculer.

4. Même question avec la fonction $g : x \mapsto \sin(x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
5. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{2(x-1)}$.
   Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f possède un axe de symétrie qu'il faudra calculer.
6. Même question avec $g : x \mapsto -x^3 + 3x + 4$.

Exercice 4 : vrai ou faux

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, le prouver. Si elles sont fausses donner un contre exemple.

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $u, v \in \mathbb{R}$. On a alors
   $$\text{(si } u < v \text{ alors } f(u) \leq f(v)\text{) équivalent à (si } u \leq v \text{ alors } f(u) \leq f(v)\text{).}$$
2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que
   $$\text{pour tout } \varepsilon > 0, |f(x) - k| \leq \varepsilon,$$
   alors f est constante et $f(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction impaire sur le domaine D. Alors nécessairement, D contient 0 et $f(0) = 0$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors nécessairement f est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.
6. Soient E une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire sur le domaine E. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire sur $f(E)$.
7. Soient f et g deux bijections d'un ensemble E dans lui-même. On dit que x est un point fixe de E pour f lorsque
   $$f(x) = x.$$
   On note $h = g \circ f$. Quelles affirmations sont vraies ?
   (a) h est une bijection de E dans lui-même.
   (b) Si f possède un point fixe et g possède un point fixe, alors h possède un point fixe.
   (c) Si h possède un point fixe alors g et f possèdent un point fixe.
   (d) $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$ et U une partie de G. Quelles affirmations sont vraies ?
   (a) Si f et g sont injectives alors h est injective.
   (b) Si f et g sont surjectives alors h est surjective.
   (c) h est une application de E dans G.
   (d) $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Exercice 5 : injectif, surjectif, bijectif ?

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

   1. $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n+1, \end{array}$ 2. $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n+1, \end{array}$ 3. $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2. \end{array}$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)}$.
   (a) f est-elle injective ? Surjective ?
   (b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
   (c) Montrer que la restriction $g = f\ |_{[-1,1]}$ est une bijection.

Exercice 6 : composition

1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :
   (a) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$,
   (b) $f(x) = 1 - x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$,
   (c) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$,
   (d) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = x^2 + 2$.
2. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g \circ h$ pour les fonctions f, g et h définies de la façon suivante :
   (a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x - 1$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x + 3$,
   (c) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sqrt{x+3}$.
3. Donner le domaine de définition des fonctions F suivantes et les mettre sous la forme $f \circ g$ où f et g sont à définir.
   (a) $F(x) = \sin(\sqrt{x})$,
   (b) $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$.
4. Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies ou non :
   (a) Si g est une fonction paire et $h = f \circ g$ alors, h est aussi une fonction paire.
   (b) Si g est une fonction impaire et $h = f \circ g$ alors, h est aussi une fonction impaire.

Exercice 7 : défis

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telle que

$$f : \begin{cases} x, & \text{si } \ x \in [0,1] \cup \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = Id_{[0,1]}$.

2. Soit $f : I \to I$ une application, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $f = f \circ f \circ f$.
   Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
3. Soit $f : I \to I$ une application, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $f = f \circ f$.
   Montrer que si f est injective ou surjective alors $f = Id_I$.
4. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère $f : I \to J$ et $g : J \to I$ deux applications telles que $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective.
   Montrer alors que f et g sont bijectives.
5. (a) Montrer que pour tous a et $b \in \mathbb{R}$, $4ab \leq (a+b)^2$.
   (b) Déterminer les domaines de définition des fonctions
   $$f(x) = \sqrt{x(x-1)} + 1 \quad \text{et } g(x) = 2\sqrt{(x-1)(x-2)} + 3,$$
   que l'on note $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
   (c) En utilisant la question (a), donner un encadrement des éléments de $f(\mathscr{D}_f)$ et de $fg(\mathscr{D}_g)$.
   (d) Montrer que $g \circ f$ est bien définie sur $\mathscr{D}_f$. Qu'en est-il pour $f \circ g$?
6. On considère deux fonction f et g définie sur I à valeurs dans J où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont bornées. On définit les parties positives et négatives d'une fonction définie sur I notées f^+ et f^-, les fonctions positives définies de la façon suivante :
   $$f^+ = \sup_{x \in I}(f, 0) \quad \text{et } f^- = \sup_{x \in I}(-f, 0).$$
   Montrer les résultats suivants :
   (a) $\sup_{x \in I}(f, g) = f + (g - f)^+$,
   (b) $\inf_{x \in I}(f, g) = g - (g - f)^+$,
   (c) $f = f^+ - f^-$,
   (d) $|f| = f^+ + f^-$.