

PLANCHE D'EXERCICES IV

- DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME - EXPONENTIELLE
D'ENDOMORPHISMES -

Exercice 1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Un endomorphisme π de E est appelé projecteur si $\pi^2 = \pi$.

1. Montrer que si π est un projecteur de E , alors $E = \text{Ker } \pi \oplus \text{Im } \pi$. La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que si π est un projecteur de E , alors $\text{rang}(\pi) = \text{trace}(\pi)$.

Dans la suite, on suppose que π_1 et π_2 sont deux projecteurs de E et que \mathbb{K} n'est pas de caractéristique 2.

3. Montrer que $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur si, et seulement si, $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

4. Montrer que si $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur, alors

i) $\text{Im}(\pi_1 + \pi_2) = \text{Im } \pi_1 \oplus \text{Im } \pi_2$,

ii) $\text{Ker}(\pi_1 + \pi_2) = \text{Ker } \pi_1 \cap \text{Ker } \pi_2$.

Exercice 2. Montrer qu'un espace vectoriel E est somme directe de sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_p si et seulement s'il existe des projecteurs $\pi_i : E \rightarrow E_i$, $i = 1, \dots, p$, satisfaisant

$$\text{Im } \pi_i = E_i, \quad \text{id}_E = \pi_1 + \dots + \pi_p, \quad \pi_i \pi_j = 0, \text{ si } i \neq j.$$

Exercice 3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $e^{\lambda I}$.

2. Montrer que si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

3. Prouver que si $B = P^{-1}AP$ alors $e^B = P^{-1}e^A P$.

4. Montrer que

$$\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}.$$

5. Montrer que si A est nilpotente, alors

$$\text{Ker}(e^A - I) = \text{Ker } A.$$

6. Calculer l'exponentielle de chaque matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}.$$

Exercice 4. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E vérifiant

$$(u - \text{id}_E)^2(u - 2\text{id}_E) = 0.$$

1. Montrer que

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E)^2 \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E).$$

Notons π_1 la projection sur $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$ et π_2 la projection sur $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^2$ parallèlement à $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$.

2. Établir les relations suivantes

$$e^u \pi_1 = e^2 \pi_1, \quad e^u \pi_2 = e u \pi_2.$$

3. Exprimer en fonction de u les projections π_1 et π_2 .

4. En déduire une expression de e^u en fonction de u .

Exercice 5. On reprend les matrices de l'exercice 5 de la feuille 4. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer en fonction de u les projecteurs spectraux de u .
2. Exprimer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Exprimer, pour tout entier $n \geq 0$, l'endomorphisme u^n en fonction de u . Écrire la matrice de u^n , dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. Exprimer, pour tout réel t , l'endomorphisme e^{tu} en fonction de u . Écrire la matrice de e^{tu} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
5. Répondre aux mêmes questions avec les endomorphismes représentés par les matrices suivantes :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^{n+1} représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{bmatrix}$$

où les n premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de u et en déduire que toutes les valeurs propres de u sont égales.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t .
4. Déterminer trois fonctions réelles $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ telles que

$$\alpha'(t) = \beta'(t) = \gamma'(t) = \alpha(t) + \beta(t) - 2\gamma(t),$$

et $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$ et $\gamma(0) = 2$.

5. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, les solutions du système

$$X(t)' = NX(t)$$

sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Exercice 7. La suite de Fibonacci est définie par

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad u_0 = u_1 = 1.$$

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^n = \begin{bmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} \end{bmatrix}$, pour tout $n \geq 2$.
2. Diagonaliser A et en déduire une formule non-récurrente pour u_n .

Exercice 8. Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n &= x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n &= y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n &= 2z_{n-1} \end{cases}$$

avec $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.