Feuille d'exercices II - suite

Suite Diagonalisation

1 Valeurs propres. Vecteurs propres

Exercice 1. Pour les espaces vectoriels V_i et les applications linéaires $T_i \in \mathcal{L}(V_i)$ suivantes trouver toutes les valeurs propres λ et les espaces propres correspondants $V_i(\lambda)$:

1. $V_1 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et T_1 l'application nulle ;
2. $V_2 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et $T_2 = \mathrm{Id}_n$ l'application identique ;
3. $V_3 = \mathbb{R}^2$ et T_3 définie par $T_3(z, w) = (z, 0)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{R}^2$,
4. $V_4 = \mathbb{R}^2$ et T_4 définie par $T_4(z, w) = (-z, w)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{R}^2$,
5. $V_5 = \mathbb{C}^2$ et T_5 définie par $T_5(z, w) = (-z, w)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$,
6. $V_6 = \mathbb{C}^2$ et T_6 définie par $T_6(z, w) = (5w + z, 5z)$ pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$,
7. $V_7 = \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ et T_7 définie par $T_7(z_1, \cdots, z_n) = (z_1 + \cdots + z_n, \cdots, z_1 + \cdots + z_n)$ pour tout $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,
8. $V_8 = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et T_8 un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire pour lequel il existe un entier k tel que T_8^k est l'application nulle).

Exercice 2. On va considérer deux espaces vectoriels de dimension infinie dans cet exercice. La définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre est dans ce cas la même que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension fini.

1. Soit V l'espace vectoriel des fonctions différentiables un nombre infini de fois et 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit $L \in End(V)$ défini par $L(f) = f''$. Montrer que les fonctions f_k, définies par $f_k(x) = \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}$, sont des vecteurs propres de L. Calculer les valeurs propres associées $\lambda_k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et l'application linéaire $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ S(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$. Trouver toutes les valeurs propres de S et, pour chaque valeur propre λ, une base de V_λ.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de ϕ_A si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id_n}) = 0$.
2. Soient ϕ_A et $\phi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ les applications linéaires associées aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de ϕ_A et ϕ_B.