Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Algèbre III - Math2020L

Feuille d'exercices I bis
RELATIONS ENTRE APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES ET RÉDUCTION D'APPLICATION LINÉAIRE

Écrire la matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 1 (Endomorphisme nilpotent)**.** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec $\dim E < +\infty$) nilpotent et $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. On suppose que p est choisi minimal.

1. Établir que pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que
$$\ker u^k = F_k \oplus \ker u^{k-1}.$$
2. Établir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
3. Observer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Soit $a \in E$ non nul. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre. On pose $F(a) = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.
2. Montrer qu'il existe des vecteurs de E $a_1, ..., a_p$ non nuls tels que
$$E = F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p).$$
3. En déduire que la dimension de E est paire et justifier l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est simple.

Exercice 3 (Endomorphisme cyclique)**.** Soient u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u.

1. L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
3. Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.

Changement de base, matrice de passage

Exercice 4. Dans chaque cas, écrire la matrice de passage de la base e dans la base f, puis la matrice de passage de la base f dans la base e.

1. $e = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $f = (f_1, f_2)$, avec
$$f_1 = \cos\theta\ e_1 + \sin\theta\ e_2, \qquad f_2 = -\sin\theta\ e_1 + \cos\theta\ e_2 \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$
2. $e = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $f = (f_1, f_2, f_3)$, avec
$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_2 + e_3 \quad f_3 = e_1 + e_3$$

Matrices semblables

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. Établir que A est semblable à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.
Établir que A est semblable à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^3 + A = 0$.
Montrer que A est semblable à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + I = 0$.
Montrer que M est semblable à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec $\operatorname{diag}(1, 2, ..., n)$ et lui sont semblables ?

Exercice 10. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.