

**Devoir surveillé n°1**

LUNDI 9 NOVEMBRE

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS

---

Durée: 1h15.

**Exercice 1.** Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les permutations de  $S_8$  données dans la notation en deux lignes par les expressions suivantes :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $\pi_1 \circ \pi_2$ ,  $\pi_2 \circ \pi_1$  et  $\pi_2^{-1}$ .
2. Calculer les signatures de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

**Exercice 2.**

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 3 est une valeur propre de  $A$ . En déduire les autres valeurs propres de  $A$ .
2. Déterminer les sous-espaces propres de  $A$ .
3. Calculer une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = P D P^{-1}.$$

4. Calculer  $P^{-1}$  et en déduire  $A^{-1}$  à l'aide de la question précédente.

5. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n + (-1)^n}{2} & 0 & \frac{3^n - (-1)^n}{2} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \frac{3^n - (-1)^n}{2} & 0 & \frac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.**

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Construire une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale  $D$ .
2. Montrer qu'il existe une matrice  $E$  telle que  $E^3 = D$ .  
En déduire une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .