Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Algèbre III - Math2020L

Correction du Devoir surveillé n°1

Exercice 1. Soient π_1 et π_2 les permutations de S_8 données dans la notation en deux lignes par les expressions suivantes :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ et π_2^{-1}.

2. Calculer les signatures de π_1 et π_2.

Correction.

1. On a :

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 8 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. On calcule le nombre d'inversions pour chacune de ces deux permutations, que l'on note N_1 et N_2 respectivement.

   - Pour π_1 : $N_1 = 2 + 2 + 4 + 4 + 1 + 2 + 0 + 0 = 15$. Donc

   $$\varepsilon(\pi_1) = (-1)^{N_1} = -1.$$

   - Pour π_2 : $N_2 = 1 + 3 + 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 8$. Donc

   $$\varepsilon(\pi_1) = (-1)^{N_2} = 1.$$

□

Exercice 2.

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 3 est une valeur propre de A. En déduire les autres valeurs propres de A.

2. Déterminer les sous-espaces propres de A.

3. Calculer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = P\,D\,P^{-1}.$$

4. Calculer P^{-1} et en déduire A^{-1} à l'aide de la question précédente.

5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} & 0 & \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} & 0 & \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction.

1. Calculons le polynôme caractéristique de A, que l'on note χ_A. Faisons pour cela un dévelopement selon la première colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det[A - XI_3] \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1-X & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(1-X)^2(1+X) + 4(1+X) \\ &= \cdots \\ &= -X^3 + X^2 + 5X + 3 \end{aligned}$$

On vérifie bien que $\chi_A(3) = 0$, donc 3 est valeur propre de A. Factorisons χ_A :

$$\chi_A = -(X-3)(X^2 + 2X + 1) = -(X-3)(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc -1 et 3.

2. Déterminons les sous- espaces propres de A, que l'on note E_{-1} et E_3 respectivement. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ avec $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

   Pour E_{-1} : on résout l'équation $AX = -X$.

$$AX = -X \text{ ssi } \begin{cases} x_1 + 2x_3 & = -x_1 \\ -x_2 & = -x_2 \\ 2x_1 + x_3 & = -x_3 \end{cases}$$
$$\text{ssi } x_1 + x_3 = 0.$$

   Donc E_{-1} est un plan, d'équation

$$E_{-1} \ : \ x_1 + x_3 = 0.$$

   On peut aussi écrire: $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} ; \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

   Pour E_3 : on résout l'équation $AX = 3X$.

$$AX = 3X \text{ ssi } \begin{cases} x_1 + 2x_3 & = 3x_1 \\ -x_2 & = 3x_2 \\ 2x_1 + x_3 & = 3x_3 \end{cases}$$
$$\text{ssi } \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

   Donc E_3 est une droite, d'équation

$$E_3 \ : \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

   On peut aussi écrire: $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} ; \ x \in \mathbb{R} \right\}$.

3. On a montré à la question précédente que les multiplicités algébriques des valeurs propres de A étaient égales à leurs multiplicités géométriques. Donc A est diagonalisable. Il existe donc P et D tels que l'équation $A = PDP^{-1}$ est vérifiée, avec P inversible et D diagonale. On prend :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   De plus, en considérant deux vecteurs colonnes de E_{-1} qui forment une famille libre et un vecteur non nul de E_3, on voit qu'on peut prendre par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On peut calculer P^{-1} de plusieurs manières différentes, que ce soit avec le pivot de Gauss, la formule de la comatrice, etc... On trouve de toute manière :
$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Remarquons que D est inversible d'inverse
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
On a donc $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, ce qui nous donne après calcul :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Remarque : penser à vérifier cette formule en calculant (certains coefficients de) A^{-1} d'une autre manière!

5. Il y a deux manières de faire : on peut le vérifier par récurrence ou directement en utilisant le fait que $A^n = PD^nP^{-1}$. Choisissons la deuxième méthode. On a
$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
Le résultat s'obtient par calcul direct.

□

Exercice 3.
On considère la matrice réelle
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Construire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D.

2. Montrer qu'il existe une matrice E telle que $E^3 = D$.
   En déduire une matrice B telle que $B^3 = A$.

Correction.

1. Il s'agit de montrer que A est diagonalisable, puis de la diagonaliser. Calculons le polynôme caractéristique de A, que l'on note χ_A. On a :

$$\chi_A = \det[A - XI_2] = X^2 + 7X - 8 = (X+8)(X-1).$$

C'est un polynôme scindé à racines simples, donc A est bien diagonalisable, et de valeurs propres -8 et 1. On sait déjà à ce stade que

$$D = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver P, on résout $AX = -8X$ puis $AX = X$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
$AX = -8X$: on obtient $x_1 + x_2 = 0$.
$AX = X$: on obtient $x_2 = 2x_1$.
On peut donc prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A = PDP^{-1}.$$

2. Si on pose

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a bien $E^3 = D$.
Remarquons alors que $(PEP^{-1})^3 = PE^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$. On pose donc

$$B = PEP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien $B^3 = A$ par le calcul précédent.

□