Université Claude Bernard Lyon 1 - semestre automne 2014/2015
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2020L

CONTRÔLE FINAL

- JEUDI 08 JANVIER 2015, 10H30 - 12H30 -

- SANS DOCUMENT NI CALCULETTE -

- TOUTE RÉPONSE DOIT ÊTRE JUSTIFIÉE -

- LE BARÈME EST INDICATIF -

I (5 pts=1+1,5+2,5)

On considère le déterminant d'une matrice dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer Δ_n pour $n = 2, 3$.
2. Pour $n \geq 4$ établir une relation linéaire de récurrence qui relie Δ_n à Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.
3. En déduire une expression explicite de Δ_n.

II (6 pts=2,5+3,5)

Soit $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$).

A (2,5=0,5+1,5+0,5)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par

$$u(p) = x^2 p'' - (x+1)p' + 2p, \quad \forall\, p \in \mathbb{R}_2[x].$$

1) Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
2) Montrer d'abord que l'équation $u(p) = x^2$ admet une solution unique p dans $\mathbb{R}_2[x]$ et puis déterminer cette solution.
3) Est-ce que u est diagonalisable ?

B (3,5=1+1+1,5)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par

$$u(p) = x^2p'' - (x+1)p' + 2p, \quad \forall\, p \in \mathbb{R}_n[x].$$

1) Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique $(1, x, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
2) Déterminer les valeurs propres et le polynôme caractéristique de u.
3) Est-ce que u est inversible ? Est-ce que u est diagonalisable ?

III (12 pts=1+1,5+1+2+1,5+2+3)

On considère la matrice A de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Quelle est la trace de A ? Quel est le déterminant de A ? La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire ses valeurs propres. (Indication de contrôle de calcul : *1 est une valeur propre de* A)
3. Déterminer le polynôme minimal de A. Est-ce que A est diagonalisable ?
4. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. Calculer les matrices des projecteurs spectraux de u dans la base canonique.
5. Donner une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telles que $A = D + N$ et $DN = ND$.
6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer N^k, D^k et A^k.
7. Résoudre le système différentiel en la variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x(t) - y(t) + z(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x(t) \qquad\quad + z(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = x(t) - y(t) + 2z(t), \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.