Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Algèbre III - Math2020L Vendredi 08 janvier 2016

Contrôle final
Durée: 2 heures.

I (4=1,5+1+1,5)

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\varphi(P) = (X-1)P' - XP''.$$

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. En déduire que φ est diagonalisable.
3. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $\varphi(P) = P$.

II (4=2+1+1)

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \\ y_n = 3y_{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 1); \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$$

avec $x_0 = y_0 = 1$, et $x(0) = y(0) = 1$, respectivement.

III (8=1+2+2+1,5+1,5)

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme minimal de A. Est-ce que A est diagonalisable ?
2. Trouver les projecteurs spectraux de A.
3. En déduire sa décomposition de Dunford $A = D + N$.
4. Calculer la matrice D^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
5. Calculer la matrice $\exp(D)$.

IV (10=1+2+1+1+1+1+1+2)

Soit $A = D + N$, la décomposition de Dunford de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où n est un entier strictement positif, D une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente.

1. Que vaut N si A est diagonalisable ? Que vaut D si A est nilpotente ?
2. Montrer que D^k ($k \in \mathbb{N}$) et e^D sont diagonalisables.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $BN = NB$. Montrer que BN est nilpotente et en déduire que $e^N - I_n$ est nilpotente.
4. Quelle est la décomposition de Dunford de A^k ($k \in \mathbb{N}$) ?
5. Quelle est celle de e^A ?

   Questions de bonus
6. Montrer que si $e^N = I_n$ alors $N = 0$.
7. Montrer que A est diagonalisable si e^A est diagonalisable.
8. Résoudre l'équation $e^X = I_n$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé

I. (**4=1,5+1+1,5**) La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, X, X^2\}$.

1. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X - 1$ et $\varphi(X^2) = 2(X-1)X - 2X = 2X^2 - 4X$. Donc la matrice de φ dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Le polynôme caratéristique est $\xi_A(X) = X(X-1)(X-2)$, qui a trois racines distinctes. Donc A est diagonalisable.
3. Soit $P = a + bX + cX^2$ tel que $\varphi(P) = P$. Alors $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Ce qui donne $b = -a$ et $c = 0$. Donc le polynôme P est de la forme $P = a(1-X)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

II. (**4=2+1+1**)

1. Soit B la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Comme B a deux valeurs propres dinstinctes -1 et 3, elle est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonal $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si (x, y) est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, alors $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Donc $y = 0$ et $x \in \mathbb{R}^*$ quelconque. On choisit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si (x, y) est un vecteur propre associé à la valeur propre 3, alors $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Donc $x = y$ et $x \in \mathbb{R}^*$ quelconque. On choisit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que
$$B^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^m & 3^m - (-1)^m \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}.$$
   Donc la solution du système de récurrence est
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = B^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}.$$
   De plus, la formule de B^m permet de calculer e^{tB} comme suit :
$$e^{tB} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \begin{pmatrix} (-1)^m & 3^m - (-1)^m \\ 0 & 3^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$
   Donc la solution du système d'équations différentielles est
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tB} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

III. (**8=1,5+2+1,5+1,5+1,5**)

1. Le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = (X+1)^2(X-3)$. Le polynôme minimal est soit $(X+1)(X-3)$ soit $\chi_A(X)$. Comme $(A+I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas nulle, $\chi_A(X)$ est le polynôme minimal. Le polynôme minimal n'étant pas scindé en racines simples, la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2. On détermine la décomposition en éléments simples suivante
$$\frac{1}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(-X-5)/16}{(X+1)^2} + \frac{1/16}{X-3},$$
c'est-à-dire,
$$1 = \frac{-1}{16}(X+5)(X-3) + \frac{1}{16}(X+1)^2.$$
Donc le projecteur spectral associé à la valeur propre -1 est
$$\pi_{-1} = \frac{-1}{16}(A+5I_3)(A-3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et celui associé à la valeur propre 3 est
$$\pi_3 = I_3 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On a la décomposition de Dunford $A = D + N$, où
$$D = -\pi_{-1} + 3\pi_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout $m \in N$, on a
$$D^m = (-1)^m\pi_{-1} + 3^m\pi_3 = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ \frac{3^m-(-1)^m}{4} & (-1)^m & 3^m - (-1)^m \\ \frac{3^m-(-1)^m}{4} & 0 & 3^m \end{pmatrix}.$$

5. On en déduit que
$$e^D = e^{-1}\pi_{-1} + e^3\pi_3 = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{e^3-e^{-1}}{4} & e^{-1} & e^3 - e^{-1} \\ \frac{e^3-e^{-1}}{4} & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

IV. (**10=1+2+1+1+1+1+1+2**) Soit $A = D + N$ la décomposition de A. On suppose que p est le plus petit entier positif tel que $N^p = 0$.

1. Si A est diagonalisable, alors $N = 0$ car la décomposition est unique. Si A est nilpotente, alors $D = 0$ pour la même raison.
2. D étant diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ telles que $D = PCP^{-1}$. Il s'ensuit que $D^k = (PCP^{-1})^k = PD_1^k P^{-1}$, où $C^k = \mathrm{diag}(c_1^k, \ldots, c_n^k)$ est une matrice diagonale. Donc D^k est diagonalisable. De même, e^D est diagonalisable car
$$e^D = e^{PCP^{-1}} = Pe^C P^{-1} = P\mathrm{diag}(e^{c_1}, \ldots, e^{c_n})P^{-1}.$$
3. Si $BN = NB$ avec $N^p = 0$, alors $(BN)^p = B^p N^p = 0$. Comme $e^N - I = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{N^j}{j!} = N\big(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} N^{j-1}\big)$, il s'ensuit que $e^N - I$ est nilpotente.
4. On a $A^k = (D+N)^k = D^k + N'$, où $N' := \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$. On sait que D^k est diagonalisable, et que $N' = N\left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^{j-1}\right)$, qui est nilpotente d'après le point 3.
5. On a la décomposition de Dunford $e^A = e^D + (e^A - e^D)$. Eeffet, e^D étant diagonalisable, par 3. on sait que $N_1 := e^A - e^D = e^D(e^N - I)$ est nilpotente.
6. Par définition de p, X^p est le polynôme minimal de N. Si $e^N = I_n$, c'est-à-dire, $N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} = 0$ et $p > 1$, alors le polynôme $X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}$ est un annulateur de N, ceci contredit le fait que X^p est le polynôme minimal de N. Donc $p = 1$, ce qui implique que $N = 0$.
7. De l'identité $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$, la décomposition de Dunford de e^A, on déduit que $e^N - I_n = 0$ si e^A est diagonalisable. Ceci implique que $N = 0$ dans la $A = D + N$, c'est-à-dire que $A = D$ est diagonalisable.
8. Si $e^X = I_n$ alors X est diagonalisable. Posons $X = P\,\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)P^{-1}$. Alors l'équation équivaut à $\mathrm{diag}(e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}) = I_n$. D'où $a_j = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $j = 1, \ldots, n$. Donc la solution de $e^X = I_n$ est
$$X = P\,\mathrm{diag}(2k_1\pi i, \ldots, 2k_n\pi i)P^{-1}$$
où $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.