Université Claude Bernard Lyon 1
UE Algèbre III

CC2 du 5 novembre 2014 - 1 heure et 15 minutes

Toute réponse doit être justifiée.

Question 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère la droite vectorielle V et le plan Π suivants :

$$V := \mathrm{Vect}((1,1,1)), \qquad \Pi := \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,-1)).$$

a) Est-ce que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus V$?

b) Rappeler la définition d'un sous-espace stable de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme f.

c) Est-ce que V est-elle stable par f ?

d) Montrer que le sous-espace Π est stable par f.

e) Les sous-espaces Π et V sont-ils des sous-espaces propres ?

f) Déterminer les polynômes caractéristique et minimal de f.

g) L'endomorphisme f est diagonalisable ? trigonalisable ?

h) En déduire des points précédents une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, où les $*$ sont des entiers à déterminer.

Question 2. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer les valeurs propres et les espaces propres de A.

b) Calculer $m_A(X)$ le polynôme minimal de A.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

d) Calculer $m_A(A)$. En déduire que A est inversible et une expression pour A^{-1}.

f) Le polynôme $P = (X-1)^3$ est-il annulateur de A ?

Question 3. Soit A une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$.

a) Rappeler la définition de polynôme annulateur de A et en donner un example.

b) Existe-t-il dans $M_2(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme minimal X^2+1 ?

c) Existe-t-il dans $M_3(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme minimal X^2+1 ?