Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Algèbre III - Math2020L

Feuille d'exercices I

PERMUTATIONS ET DÉTERMINANTS

Exercice 1. Soient π_1, π_2 et π_3 trois permutations de S_8 données dans la notation en deux lignes par les expressions suivantes :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Calculer $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$ et $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.

b. Déterminer les points fixes de ces trois permutations.

c. Calculer leurs inverses.

d. Calculer leurs signatures.

e. Trouver leurs decompositions en cycles disjoints.

f. Representer les permutations comme produit de transpositions.

Exercice 2. Soient σ_1, σ_2 et σ_3 trois permutations de S_8 données dans la notations de cycles par les expressions suivantes :

$$\sigma_1 = (1435)(2687),\ \sigma_2 = (12)(34)(56)(78),\ \sigma_3 = (137246).$$

a. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ et $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

b. Déterminer les points fixes de ces trois permutations.

c. Calculer leurs inverses.

d. Calculer leurs signatures.

e. Calculer leurs notations en deux lignes.

f. Representer les permutations comme produit de transpositions.

Exercice 3. **a**. Montrer que pour chaque permutation la signature est égale à la signature de son inverse.

b. Écrire une liste des permutations de $\mathcal{S}_4$ et leurs signatures.

c. Donner un exemple pour une permutation σ dans S_{12} sans points fixes et avec signature $\varepsilon(\sigma) = -1$.

d. Soit π une permutation telle que $\pi^3 = \mathrm{id}$. Quelle est sa signature ?

Exercice 4. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et $\det B$.

Exercice 6. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^tMM$; en déduire la valeur du déterminant de M.

Exercice 7. Déterminer les nombres complexes λ tels que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Montrer que les matrices suivantes ont déterminant zéro :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Calculer à l'aide du pivot de Gauß les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique : ${}^tA = -A$. Démontrer que, si A est inversible, alors n est nécessairement un nombre pair.

Exercice 11. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des entiers impairs. Montrer que $\det A$ est un entier, et que celui-ci est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^2$, l'aire d'un parallélogramme défini par les vecteurs v et w est donné par

$$\left| \det\left(\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right) \right|.$$

a. Pour une 2×2–matrice A trouver l'aire du parallélogramme défini par Av et Aw.

b. Qu'est-ce qu'on peut conclure sur le déterminant d'une matrice correspondante à une rotation ou reflexion?

Exercice 13. Calculer le déterminant de la matrice suivante avec la formule de developpement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. La notation $\mathbb{K}$ désignant un corps commutatif, soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $AB = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 15. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots & \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i).$$

Exercice 16. Soient λ et μ deux réels et $A(\lambda, \mu)$ la matrice :

$$A(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ -1 & \mu & \lambda \\ 1 + \lambda + \mu & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de $A(\lambda, \mu)$.

b. Déterminer en fonction de λ et μ le rang de la matrice $A(\lambda, \mu)$.

Exercice 17. Calculer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$