
Feuille d'exercices IV
DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME - EXPONENTIELLE D'ENDOMORPHISMES

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme π de E est appelé projecteur si $\pi^2 = \pi$.
1. Montrer que si π est un projecteur de E, alors $E = \text{Ker } \pi \oplus \text{Im } \pi$. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que si π est un projecteur de E, alors $\text{rang}(\pi) = \text{trace}(\pi)$.
Dans la suite, on suppose que π_1 et π_2 sont deux projecteurs de E et que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2.
3. Montrer que $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur si, et seulement si, $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.
4. Montrer que si $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur, alors

i) $\text{Im } (\pi_1 + \pi_2) = \text{Im } \pi_1 \oplus \text{Im } \pi_2$,
ii) $\text{Ker } (\pi_1 + \pi_2) = \text{Ker } \pi_1 \cap \text{Ker } \pi_2$.

Exercice 2. Montrer qu'un espace vectoriel E est somme directe de sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ si et seulement s'il existe des projecteurs $\pi_i : E \longrightarrow E_i$, $i = 1, \ldots, p$, satisfaisant

$$\text{Im } \pi_i = E_i, \qquad \text{id}_E = \pi_1 + \ldots + \pi_p, \qquad \pi_i \pi_j = 0, \text{ si } i \neq j.$$

Exercice 3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
1. Calculer $e^{\lambda I}$.
2. Montrer que si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
3. Prouver que si $B = P^{-1}AP$ alors $e^B = P^{-1} e^A P$.
4. Montrer que
$$\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}.$$
5. Montrer que si A est nilpotente, alors
$$\text{Ker } (e^A - I) = \text{Ker } A.$$
6. Calculer l'exponentielle de chaque matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}.$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E vérifiant
$$(u - \text{id}_E)^2 (u - 2\text{id}_E) = 0.$$
1. Montrer que
$$E = \text{Ker } (u - \text{id}_E)^2 \oplus \text{Ker } (u - 2\text{id}_E).$$
Notons π_1 la projection sur $\text{Ker } (u - 2\text{id}_E)$ parallélement à $\text{Ker } (u - \text{id}_E)^2$ et π_2 la projection sur $\text{Ker } (u - \text{id}_E)^2$ parallélement à $\text{Ker } (u - 2\text{id}_E)$.
2. Établir les relations suivantes
$$e^u \pi_1 = e^2 \pi_1, \qquad e^u \pi_2 = eu\pi_2.$$
3. Exprimer en fonction de u les projections π_1 et π_2.
4. En déduire une expression de e^u en fonction de u.

Exercice 5. On reprend les matrices de l'exercice 5 de la feuille 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer en fonction de u les projecteurs spectraux de u.
2. Exprimer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Exprimer, pour tout entier $n \geq 0$, l'endomorphisme u^n en fonction de u. Écrire la matrice de u^n, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Exprimer, pour tout réel t, l'endomorphismee e^{tu} en fonction de u. Écrire la matrice de e^{tu} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Répondre aux mêmes questions avec les endomorphismes représentés par les matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{bmatrix}$$

où les n premières colonnes sont égales.
1. Calculer le rang de u et en déduire que toutes les valeurs propres de u sont égales.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t.
4. Déterminer trois fonctions réelles $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ telles que

$$\alpha'(t) = \beta'(t) = \gamma'(t) = \alpha(t) + \beta(t) - 2\gamma(t),$$

et $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$ et $\gamma(0) = 2$.
5. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, les solutions du système

$$X(t)' = NX(t)$$

sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 7. La suite de Fibonacci est définie par

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n \geq 2, \qquad u_0 = u_1 = 1.$$

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^n = \begin{bmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} \end{bmatrix}$, pour tout $n \geq 2$.
2. Diagonaliser A et en déduire une formule non-récurrente pour u_n.

Exercice 8. Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n & = & y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n & = & 2z_{n-1} \end{array} \right.$$

avec $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.