Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016
Algèbre III - Math2020L

Feuille d'exercices III
POLYNÔME MINIMAL - THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Exercice 1. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes avec $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n X^n$. Comment procéder avec le polynôme minimal ?
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E est triangulaire avec des 0 sur la diagonale est nilpotente d'indice de nilpotence $p \leq n$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Soit J une matrice complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer J^p pour tout entier $p \in \{1, \dots, n\}$.

   (b) En déduire que J est diagonalisable.

   (c) Montrer que $I_n, J, \dots, J^{n-1}$ sont linéairement indépendantse.

   (d) Déterminer le polynôme minimal de J.

   (e) Calculer les valeurs propres de J.

   (f) Diagonaliser J en exhibant la matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer A comme un polynôme en la matrice J.

   (b) Montrer que, pour tout polynôme Q, $Q(J)$ est diagonalisable et que

$$\mathrm{Spec}(Q(J)) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(J)\}$$

   où $\mathrm{Spec}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice M.

   (c) En déduire que A est diagonalisable et calculer les valeurs propres de A.

   (d) Calculer le déterminant de A.

Exercice 6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'application linéaire Trace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Déterminer l'image de la Trace et la dimension de son noyau.

2. Montrer qu'on a une somme directe :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{Trace}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n).$$

3. Soit u l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$u(A) = A + \mathrm{Trace}(A)\, I_n.$$

(a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 7. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u.
   (Indication. On pourra utiliser le fait que le polynôme X ne divise pas le polynôme caractéristique de u.)

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si P est premier avec le polynôme minimal m_u de u alors l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.
2. Inversement, montrer que si $P(u)$ est inversible, alors les polynômes P et m_u sont premiers entre eux.

Exercice 9. Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u au sous-espace F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On considère deux sous-espaces vectoriel F et G de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Si m_F et m_G désignent les polynômes minimaux des restrictions de u à F et G respectivement, montrer que le polynôme minimal m_u de u est donné par

$$m_u = \mathrm{PPCM}(m_F, m_G).$$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 12. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^3 + X = 0. \tag{1}$$

Soit A une matrice non nulle satisfaisant l'équation (1).

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \ker A \oplus \ker(A^2 + I_3).$$
2. Déterminer le polynôme minimal de A.

3. Montrer que, si x n'appartient pas à $\ker A$, alors la famille (x, Ax) est libre.

4. Montrer que $\ker A$ est de dimension 1. En déduire que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0.$$

La matrice compagnon du polynôme P est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de E représenté par la matrice A dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E fixée.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n P$.

2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme P est annulateur de u.

3. En déduire que P est le polynôme minimal de u.

Soient v un endomorphisme de E et x un vecteur non nul de E. Soit p le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{B}_x = (x, v(x), \ldots, v^p(x))$ soit libre.

4. Montrer que le sous-espace

$$E_x = \mathrm{Vect}(x, v(x), \ldots, v^p(x))$$

est stable par v.

5. Montrer que la matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ de la restriction de l'endomorphisme v au sous-espace E_x est une matrice compagnon.

6. Écrire le polynôme associé à cette matrice compagnon.

7. En déduire que le polynôme caractéristique de v vérifie $p_v(x) = 0$.

8. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que la famille $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

1. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_x$ est une matrice compagnon.

2. Montrer qu'un endomorphisme cyclique possède une unique matrice compagnon.

3. Montrer qu'un endomorphisme cyclique de E est diagonalisable si et seulement si il possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 15. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des endomorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on définit l'application

$$\begin{aligned} D_u : \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E) \\ f &\mapsto u \circ f. \end{aligned}$$

1. Montrer que D_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a
$$(D_u)^n(f) = u^n \circ f.$$
En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a $P(D_u) = D_{P(u)}$.

3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si D_u est diagonalisable.

4. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est notée M. On définit la base $(\epsilon_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{L}(E)$ par
$$\epsilon_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}\, e_i$$
où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$. Montrer que la matrice de D_u dans la base
$$(\epsilon_{1,1}, \ldots, \epsilon_{n,1}, \epsilon_{1,2}, \ldots, \epsilon_{n,2}, \ldots, \epsilon_{1,n}, \ldots, \epsilon_{n,n}),$$
s'écrit
$$\begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E)$, formée des endomorphismes représentés dans la base canonique par les matrices E_i suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que u est diagonalisable.

6. Écrire la matrice de D_u dans la base $\mathcal{B}$.

7. Diagonaliser D_u.