2. Généralités sur les groupes - Groupes de matrices

1. Sous-groupes.

Exercice 2.1
1. Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant $12\mathbb{Z}$.

Exercice 2.2 Soient $m, n \geq 1$.
1. A quelle condition $m\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z}$?
2. Que vaut $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$? Donner des exemples.
3. Vérifier que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} := \{a + b \colon a \in m\mathbb{Z},\ b \in n\mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
4. Déterminer le sous-groupe $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$. Donner des exemples.

Exercice 2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ des racines n-ième de l'unité. Montrer que $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ est une sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On note $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}^*,\ z^k = 1\}$. Montrer que $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 2.4
1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Est-ce encore le cas pour l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$? (On pourra considérer les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.)
3. Et pour l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$? (On pourra considérer les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)
4. Que peut-on dire si on remplace $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?
5. Que peut-on dire si on remplace $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $n > 2$?

Exercice 2.5 Soit G un groupe.
1. Soit $a \in G$. Montrer que $Z(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$ est un sous-groupe de G.
2. Soit S un sous-ensemble de G. Montrer que $Z(S) = \{x \in G \mid \forall s \in S,\ xs = sx\}$ est un sous-groupe de G.
3. Montrer que $Z(G)$ est un groupe abélien. On appelle $Z(G)$ le **centre** de G.

Exercice 2.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble des homothéties de E, $H = \{h_\lambda : x \mapsto \lambda x |\, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
2. Montrer que $H \subset Z(GL(E))$.
3. Soit $u \in GL(E)$. Montrer que si pour tout $x \in E$, le vecteur $u(x)$ est colinéaire à x alors u appartient à H.
4. Soit $u \in Z(GL(E))$ tel que $u \notin H$. Montrer qu'il existe des éléments $x, f_3, \ldots, f_n \in E$ tels que $\mathcal{B} = (x, u(x), f_3, \ldots, f_n)$ est une base de E .
5. Soit $v \in GL(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $u \circ v(x),\ v \circ u(x)$.
6. En déduire que $Z(GL(E)) = H$.
7. Vérifier que le même schéma de preuve permet de montrer que
$$Z(SL(E)) = Z(GL(E)) \cap SL(E).$$
8. Montrer que $Z(SL(E))$ est isomorphe à $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2.7 Soit G un groupe.

1. Montrer que si $\{H_i,\ i \in I\}$ est une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.
2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que l'union de deux sous-groupes de G soit un sous-groupe de G.

Exercice 2.8 Soit G un groupe et H et K deux sous-groupes de G. On pose
$$HK = \{hk \in G |\, h \in H,\, k \in K\}.$$
Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 2.9 Soient G_1 et G_2 deux groupes. Montrer que le produit direct $G_1 \times G_2$ est abélien si et seulement si les groupes G_1 et G_2 sont abéliens.

2. Morphismes.

Exercice 2.10 Montrer que tout goupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 2.11 Parmi les groupes suivants lequels sont isomorphes ?

$(\mathbb{Z},+)$	$(\mathbb{R},+)$
$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$	$\mathbb{R}^*$ avec la multiplication
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$	$\mathbb{R}^{*+}$ avec la multiplication
$(17\mathbb{Z},+)$	$\mathbb{Q}^*$ avec la multiplication
$(\mathbb{Q},+)$	$\mathbb{C}^*$ avec la multiplication
$(3\mathbb{Z},+)$	le sous-groupe $\langle\pi\rangle$ de $\mathbb{R}^*$ avec la multiplication

Exercice 2.12 Combien y-a-t-il d'homomorphismes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$? De $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? De $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 2.13 Montrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2Z)$.

Exercice 2.14 Montrer que l'application de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ qui a une matrice associe son déterminant est un morphisme de groupes.

3. Groupe orthogonal

Exercice 2.15 Soit E un espace euclidien de dimension n sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que dans toute base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, la matrice d'un endomorphisme orthogonal $u \in O(E)$ est une matrice orthogonale.
2. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ et $O(E)$ sont isomorphes.

Exercice 2.16 Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. La multiplication par R_θ a quel effet sur un vecteur v de $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ on a $R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$.
3. Montrer que l'application $f : (\mathbb{R},+) \to SO_2(\mathbb{R})$ définie par $\theta \mapsto R_\theta$ est un morphisme surjectif de groupes. On appelera dorénavant les élément de $SO_2(\mathbb{R})$ des rotations.

4. En déduire que $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien.
5. Quel est le noyau de f ?

Exercice 2.17 1. Écrire la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}e_1$. Donner ensuite la matrice de cette même réflexion dans la base orthonormée (f_1, f_2), avec $f_1 = \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ et $f_2 = \frac{-e_1+e_2}{\sqrt{2}}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner la matrice dans la base (e_1, e_2) de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2)$.

Exercice 2.18 1. Que dire de la composée de deux réflexions ?

2. Calculer le produit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en raisonnant uniquement géométriquement. Vérifier ensuite le résultat.

Exercice 2.19 1. Montrer que les éléments de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

2. En utilisant l'exercice 2.17, montrer que les éléments de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ sont des réflexions.

Exercice 2.20 1. Montrer que la composée d'une réflexion et une rotation est une réflexion.

2. En déduire que toute rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions.

Exercice 2.21 Soit $ABCD$ un carré du plan $\mathbb{R}^2$ dont les diagonales se coupent en $(0, 0)$. On note D_4 l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui fixent globalement ce carré. Montrer que D_4 est un sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$. Est-ce que D_4 dépend du choix du carré ? (Le groupe D_4 s'appelle quatrième groupe diédral.) Décrire les éléments de D_4. Le groupe D_4 est-il abélien ? Décrire tous les sous-groupes de D_4.