

Contrôle continu 1 - Jeudi 9 octobre 2014

durée : 1h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Une grande importance sera accordée à la précision et la concision de la rédaction.

QUESTION DE COURS.

Soit (G, \star) et (H, \star') deux groupes. On note e_G , respectivement e_H , l'élément neutre de G , respectivement de H .

Soit φ un morphisme du groupe G vers le groupe H et on note $\ker \varphi$ son noyau.

Montrer que φ est injective si et seulement $\ker \varphi = \{e_G\}$.

PROBLÈME.

Le but du problème ci-dessous est de résoudre dans \mathbb{Z} l'équation

$$x^2 + 4y^2 = 7z^2.$$

1. Déterminer les carrés de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers qui ne sont pas tous les deux divisibles par 7. Montrer que $a^2 + 4b^2$ n'est pas multiple de 7.
3. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 + 4b^2 = 7c^2$.
 - (a) Dédurre de la question précédente que 7 divise a et b .
 - (b) Montrer que 7 divise c .
4. Conclure.