Théorème. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{V}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Il exdiste alors sur $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{V})$ une unique mesure β telle que $\beta(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$ pour tout rectangle mesurables $A \times B$.

Lemme. Soit $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$ mesurable. Alors la fonction $y \mapsto \mu(E_y)$ est mesurable sur $(Y, \mathcal{V})$, où $E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$ est la coupe de E en y.

Démonstration. $E_y \in \mathcal{T}$, donc $\mu(E_y)$ est bien défini. Comme X et Y sont σ-finis, il y a des suites croissantes $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ et $(B_n)_n \subset \mathcal{V}$ avec $X = \bigcup_n A_n$, $Y = \bigcup_n B_n$, et $\mu(A_n), \nu(B_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $X \times Y = \bigcup_n A_n \times B_n$. On pose

$$\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{V} : y \mapsto \mu(((A_n \times B_n) \cap E)_y) \text{ est mesurable pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $E = A \times B$ est un rectangle mesurable, alors

$$\mu(((A_n \times B_n) \cap (A \times B))_y) = \mu(A_n \cap A)\chi_{B_n \cap B}(y),$$

(où χ_D est la fonction caractéristique de D), ce qui est une fonction mesurable, car $A_n \cap A \in \mathcal{T}$ et $B_n \cap B \in \mathcal{V}$. Donc $\mathcal{S}$ contient toutes les rectangles mesurables.

Si $(E_i : i < k)$ sont des éléments de $\mathcal{S}$ deux-à-deux disjoints, alors

$$\mu((\bigcup_{i<k} E_i)_y) = \sup_{i<k} \mu((E_i)_y).$$

Puisque une somme de fonctions mesurables est encore mesurable, $\bigcup_{i<k} E_{\in}\mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$ contient le clan $\mathcal{C}$ des ensembles mesurables élémentaires, constitué de réunions finies de rectangles mesurables deux-à-deux disjoints.

Si $(E_k)_k$ est une suite croissante dans $\mathcal{S}$ et $E = \bigcup_k E_k$, alors pour tout n

$$\mu(((A_n \times B_n) \cap E)_y) = \sup_k \mu(((A_n \times B_n) \cap E_k)_y)$$

est mesurable, et $E \in \mathcal{S}$.

Si $E \in \mathcal{S}$, soit $E^c = X \times Y \setminus E$ son complément. Alors pour tout n

$$\mu(((A_n \times B_n) \cap E^c)_y) = \mu(A_n \setminus ((A_n \times B_n) \cap E)_y))\chi_{B_n}(y) = [\mu(A_n) - \mu(((A_n \times B_n) \cap E)_y)]\chi_{B_n}(y),$$

ce qui est mesurable. Ainsi $E^c \in \mathcal{S}$. Il en suit que $\mathcal{S}$ est clos par intersection d'une suite décroissante : $\mathcal{S}$ est une classe monotone.

Soit $\mathcal{M}$ la classe monotone engendré par $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$. Pour tout $A \in \mathcal{M}$ soit

$$\mathcal{M}(A) = \{B \in \mathcal{M} : A \setminus B, B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{M}\}.$$

Il est facile de voir que $\mathcal{M}(A)$ est toujours une classe monotone, que $A \in \mathcal{M}(A)$, et pour tout $B \in \mathcal{M}$ que $B \in \mathcal{M}(A)$ ssi $A \in \mathcal{M}(B)$. Or, si $A \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(A)$, d'où $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}$. Donc pour $M \in \mathcal{M}$ et $A \in \mathcal{C}$, puisque $M \in \mathcal{M}(A)$ on a $A \in \mathcal{M}(M)$, d'où $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(M)$ et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(M)$. Ainsi $\mathcal{M}$ est une classe monotone close par complément relatif et réunion : c'est une tribu.

Comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$, et ce dernier est la tribu engendré par $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{M} = \mathcal{S} = \mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$. Ainsi

$$\mu(E_y) = \sup_n \mu(((A_n \times B_n) \cap E)_y)$$

est une fonction mesurable en y pour tout $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$. $\square$

Démonstration du théorème. Pour $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$ on pose

$$\beta(E) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu.$$

On a $\beta(\emptyset) = 0$. Si $(E_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$ d'ensembles deux-à-deux disjoints et $E = \bigcup_n E_n$, alors E_y est la réunion deux-à-deux disjointe des $(E_n)_y$ pour tout $y \in Y$, d'où $\mu(E_y) = \sum_n \mu((E_n)_y)$, et

$$\beta(E) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu = \int_Y \sum_n \mu((E_n)_y)\, d\nu = \sum_n \int_Y \mu((E_n)_y)\, d\nu = \sum_n \beta(E_n)$$

d'après le théorème de convergence monotone. Ainsi β est une mesure. On a

$$\beta(A \times B) = \int_Y \mu(A)\chi_B(y)\, d\nu = \mu(A)\, \nu(B)$$

pour tout rectangle mesurable. En particulier $\beta(A_n \times B_n) < \infty$, et β est σ-finie.

Si β' est une autre mesure sur $\mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$ avec $\beta'(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)$ pour tout rectangle mesurable, alors β et β' coïncident sur $\mathcal{C}$, et donc sur $\mathcal{T} \otimes \mathcal{V}$, ce qui montre l'unicité. $\square$