Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

PARTIEL

19 octobre 2015 — durée 2 h

Question de cours. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Donner l'énoncé du théorème de convergence monotone.
2. En déduire le théorème suivant : Si $f_n : X \to [0, \infty]$ est une fonction mesurable positive pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n.$$

Solution.

1. *Théorème de Convergence Monotone.* Soit $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de fonctions mesurables positives $X \to [0, \infty]$. Alors la fonction $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n$ est mesurable, et
$$\int f = \lim_n \int f_n = \sup_n \int f_n.$$
2. Soit $g_n = \sum_{k=0}^n f_n$. Alors pour tout n la fonction g_n est mesurable $X \to [0, \infty]$ comme somme de fonctions mesurables, et la suite $(g_n : n \in \mathbb{N})$ est croissante puisque les f_n sont positives. De plus, $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_n g_n$. D'après le Théorème de Convergence Monotone, f est mesurable, et
$$\int \sum_n f_n = \int f = \int \lim_n g_n = \lim_n \int g_n = \lim_n \int \sum_{k=0}^n f_n = \lim_n \sum_{k=0}^n \int f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n,$$
puisque l'intégral commute avec une somme finie.

Exercice 1. Soit X un ensemble dénombrable. On propose de déterminer toutes les tribus sur X.

1. Soit $\{X_i : i \in I\})$ une partition de X, c'est-à-dire $\emptyset \neq X_i \subseteq X$ pour $i \in I$ avec $\bigcup_{i\in I} X_i = X$ et $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.
Montrer que la collection des parties X_J de X de la forme $X_J = \bigcup_{i\in J} X_i$, où J parcourt les parties de I, est une tribu sur X (où l'on pose $\bigcup_{i\in\emptyset} X_i = \emptyset$).
2. Réciproquement, soit $\mathcal{T}$ une tribu sur X.
   (a) Pour $x, y \in X$ on pose $x \sim y$ si tout $A \in \mathcal{T}$ qui contient x contient galement y. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. En déduire que les $\sim$-classes forment une partition de X.
   (b) Montrer que pour tout $x \in X$ la $\sim$-classe $[x]$ de x est dans $\mathcal{T}$. Attention : Justifier que vous ne considérez que des intersections *dénombrables*.
   (c) Montrer que $[x]$ est minimal dans $\mathcal{T}$: si $A \in \mathcal{T}$, alors $[x] \cap A = \emptyset$ ou $[x] \subseteq A$.
   (d) En déduire que $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i\in J}[x_i] : J \subseteq I\}$, où $\{[x_i] : i \in I\}$ est la partition de X obtenu en (a).
3. Les tribus sur un ensemble non-dénombrable ne sont pas toutes de cette forme. Quelles parties de l'argument du point 2. ne marchent plus dans ce cas ?

Solution.

1. Soit $\mathcal{T} = \{X_J : J \subseteq I\}$. Alors $\emptyset = X_\emptyset \in \mathcal{T}$; si $X_J \in \mathcal{T}$, alors $X \setminus X_J = X_{I \setminus J} \in \mathcal{T}$, et si $X_{J_n} \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{J_n} = X_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n} \in \mathcal{T}.$$
Donc $\mathcal{T}$ est une tribu.
2. Si $x \in X$ et $x \in A \in \mathcal{T}$, alors $x \in A$. Donc $x \sim x$.
Si $x \sim y$ et $y \sim z$, soit $A \in \mathcal{T}$ avec $x \in A$. Alors $y \in A$ puisque $x \sim y$, et donc $z \in A$ pouisque $y \sim z$. Ainsi $x \sim z$.
Enfin, soit $x \sim y$ et $A \in \mathcal{T}$ avec $y \in A$. Si $x \notin A$, alors $x \in X \setminus A$; puisque $X \setminus A \in \mathcal{T}$ (comme $\mathcal{T}$ est clos par complément) et $x \sim y$, on a $y \in X \setminus A$ et $y \notin A$, une contradiction. Ainsi $x \in A$, et donc $y \sim x$.
Ceci montre que $\sim$ est bien une relation d'équivalence. Comme pour toute relation d'équivalence, ses classes forment une partition : Tout $x \in X$ est dans la classe $[x]$, et si $z \in [x] \cap [y]$, alors $x \sim y \sim z$, d'où $x \sim z$ et $[x] = [y]$ (deux classes qui s'intersectent sont égales).
3. On fixe $x \in X$. Pour tout $y \in X$ avec $y \notin [x]$ soit $A_y \in \mathcal{T}$ tel que $x \in A$ mais $y \notin A$. Alors $[x] = \bigcap_{y \notin [x]} A_y$: Si $z \notin [x]$, puisque $z \notin A_z$ on a $z \notin \bigcap_{y \notin [x]} A_y$ et $\bigcap_{y \notin [x]} A_y \subseteq [x]$. Réciproquement, si $z \in [x]$, alors puisque $x \sim z$ et $x \in A_y \in \mathcal{T}$ pour tout $y \notin [x]$ on a $z \in A_y$, d'où $z \in \bigcap_{y \notin [x]} A_y$ et $[x] \subseteq \bigcap_{y \notin [x]} A_y$. Or, ce dernier est une intersection dénombrable de parties dans $\mathcal{T}$ (comme l'ensemble $X \setminus [x]$ est dénombrable), et est lui-même dans $\mathcal{T}$ qui est une tribu.
4. Soient $x_i n X$ et $A \in \mathcal{T}$ avec $A \cap [x] \neq \emptyset$. Alors si $y \in [x]$, puisque $x \sim y$ on a $y \in A$, d'où $[x] \subseteq A$.
5. D'après (c), pour tout $A \in \mathcal{T}$ on a $A = \bigcup_{x \in A} [x]$. Donc chaque $A \in \mathcal{T}$ est une réunion au plus dénombrable de $\sim$-classes (puisque A est dénombrable). Réciproquement, comme toute $\sim$-classe est dans $\mathcal{T}$, chaque réunion dénombrable de $\sim$-classes est dans $\mathcal{T}$. Ainsi $\mathcal{T}$ est bien la tribu engendré par la partition en $\sim$-classes.
6. Si X n'est pas dénombrable, d'une part $\bigcap_{y \notin [x]} A_y$ n'est pas forcément une intersection dénombrable, et $[x]$ n'est pas toujours dans $\mathcal{T}$. Ensuite, $\bigcup_{x \in A} [x]$ n'est pas toujours une réunion dénombrable.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to Y$ une application. On rappelle que la tribu image directe $f(\mathcal{T})$ sur Y est défini par $B \in f(\mathcal{T})$ ssi $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, pour toute partie $B \subseteq Y$.

1. Montrer que $f(\mathcal{T})$ est bien une tribu sur Y.
2. Montrer que l'application
$$\nu : f(\mathcal{T}) \to [0, \infty[, \qquad \nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$
définit une mesure sur $(Y, f(\mathcal{T}))$.

Solution.

1. Si $B \in f(\mathcal{T})$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Donc $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, puisque $\mathcal{T}$ est clos par complément. Ainsi $Y \setminus B \in f(\mathcal{T})$.
Si $B_n \in f(\mathcal{T})$, alors $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Donc $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$, puisque $\mathcal{T}$ est clos par réunion dénombrable. Ainsi $\bigcup_n B_n \in f(\mathcal{T})$.
Enfin, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$, donc $\emptyset \in f(\mathcal{T})$. Ainsi $\mathcal{T}$ est bien une tribu.

2. Pour $B \in f(\mathcal{T})$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, et ν est bien défini.
   On a $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.
   Enfin, si $(B_n : n \in \mathbb{N})$ est une suite de parties disjointes d'Y dans $f(\mathcal{T})$, alors $(f^{-1}(B_n) : n \in \mathbb{N})$ est une suite de parties disjointes de X dans $\mathcal{T}$. Donc

$$\nu(\bigcup_n B_n) = \mu(f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \mu(\bigcup_n f^{-1}(B_n)) = \sum_n \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_n \nu(B_n).$$

   Ainsi ν est une mesure.

Exercice 3. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soient A_1, $A_2, \ldots,$ A_{100} des boréliens dans $[0,1]$ tels que $\sum_{n=1}^{100} \lambda(A_n) > 99$. Montrer que $\bigcap_{n=1}^{100} A_n \neq \emptyset$.
[Indication : Commencer par montrer que la mesure du complément $\mu((\bigcap_{n=1}^{100} A_n)^c) < 1$.]

Solution. Pour $A \subseteq [0,1]$ on note le complément $[0,1]\backslash A$ par A^c. Alors $\lambda(A^c) = 1-\lambda(A)$. On a donc :

$$\lambda((\bigcap_{n=1}^{100} A_n)^c) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{100} A_n^c) \leq \sum_{n=1}^{100} \lambda(A_n^c) = \sum_{n=1}^{100}(1-\lambda(A_n)) = 100-\sum_{n=1}^{100} \lambda(A_n) < 100-99 = 1.$$

Donc

$$\lambda(\bigcap_{n=1}^{100} A_n) = 1 - \lambda((\bigcap_{n=1}^{100} A_n)^c) > 1 - 1 = 0,$$

et $\bigcap_{n=1}^{100} A_n$ est non-vide.