PARTIEL Mesure et Intégration

3 novembre 2014 — durée 2 h

Question 1. Soit $X = \mathbb{N}$. Pour tout $L > 0$ on note

$$\mu_L : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \qquad \mu_L(A) = \sum_{k \in A} L^k \text{ pour } A \subseteq X.$$

1. Prouver que μ_L est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$ pour tout $L > 0$.
2. Pour quels $L > 0$ la mesure μ_L est-elle finie ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $A_n = X \cap [n, \infty[$. Calculer $\mu_L(A_n)$ et $\mu_L(\mathbb{N} \setminus A_n)$ pour tous $L > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $(L_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de réels strictement positifs, avec limite $L < \infty$. Soit $(A_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de parties de X et $A = \bigcup_n A_n$. Prouver que $\lim_n \mu_{L_n}(A_n) = \mu_L(A)$.

Solution.

1. On a $\mu_L(\emptyset) = 0$. Soit $(A_i : i \in \mathbb{N})$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ deux-à-deux disjoints. Comme tous les termes sont positifs, on peut re-ordonner la somme et on a
$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} L^k = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in A_n} L^k = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_L(A_n).$$
Donc μ_L est une mesure.
2. Si $0 < L < 1$ on a $\mu_L(X) = \sum_{k \in X} L^k = \frac{1}{1-L} < \infty$; pour $L \geq 1$ on a
$$\mu_L(X) = \sum_{k \in X} L^k \geq \sum_{k \in X} 1 \to \infty.$$
Donc μ_L est finie si et seulement si $L < 1$.
3. On a $\mu_L(A_n) = \sum_{k \geq n} L^k = \frac{L^n}{1-L}$ si $L < 1$, et $\mu_L(A_n) = \infty$ si $L \geq 1$. Pour $L \neq 1$ on a $\mu_L(X \setminus A_n) = \sum_{k=0}^{n-1} L^k = \frac{L^n - 1}{L-1}$, et pour $L = 1$ on a $\mu_1(X \setminus A_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
4. Soit $A = \bigcup_n A_n$. Comme $l_n \leq L$ et $A_n \subseteq A$, on a $\mu_{L_n}(A_n) \leq \mu_L(A)$, et donc
$$\lim_n \mu_{L_n}(A_n) \leq \mu_L(A).$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq k$ on a $\mu_{L_k}(A_n) \leq \mu_{L_n}(A_n)$. Ainsi
$$\lim_n \mu_{L_n}(A_n) \geq \lim_n \mu_{L_k}(A_n) = \mu_{L_k}(A),$$
où l'égalité découle du fait que $(A_n)_n$ est croissante. Donc
$$\lim_n \mu_{L_n}(A_n) \geq \lim_k \mu_{L_k}(A) = \lim_k \sum_{j \in A} L_k^j = \sum_{j \in A} \lim_k L_k^j = \sum_{j \in A} L^k = \mu_L(A),$$
comme limite et sommation commutent pour des sommes de termes positifs. On a donc égalité.

Question 2. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de sous-ensembles de X contenus dans $\mathcal{T}$.

1. Prouver que $\bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\mu(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$
2. Si $B_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$ et $b_n = \inf_{k \geq n} \mu(A_k)$, prouver que $B_n \subseteq B_{n+1}$ et $b_n \leq b_{n+1}$.
3. En déduire que
$$\mu(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$
4. Si on définit $\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, en déduire le Lemme de Fatou pour les suites d'ensembles :
$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

Solution.

1. $\mathcal{T}$ est une tribu, donc clos par intersection denombreble de ses membres. Ainsi $\bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \geq n$ on a $\bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq A_m$, donc $\mu(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \mu(A_m)$, et ainsi
$$\mu(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \inf_{m \geq n} \mu(A_m) = \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n = B_{n+1} \cap A_n \subseteq B_{n+1}$ et
$$b_n = \inf_{k \geq n} \mu(A_n) = \inf\{\mu(A_n), \inf_{k \geq n+1} \mu(A_k)\} = \inf\{\mu(A_n), b_{n+1}\} \leq b_{n+1}.$$
3. On a, puisque μ est une mesure, et d'après les parties 2. et 1.,
$$\mu(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k) = \mu(\bigcup_n B_n) = \sup_n \mu(B_n) = \sup_n \mu(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$
4. D'après la définition, $\liminf_n a_n = \sup_n \inf_{k \geq n} a_k$ pour toute suite $(a_n : n \in \mathbb{N})$. Ainsi, avec $a_n = \mu(A_n)$, on obtient de la partie 3. que
$$\mu(\liminf_n A_n) = \mu(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} \mu(A_k) = \liminf_n \mu(A_n).$$

Question 3. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite décroissante de fonctions mesurables $f_n : X \to [0, \infty]$. On suppose $\int f_0 \neq \infty$. Démontrer que

$$\lim_n \int f_n = \int (\lim_n f_n).$$

Solution. On pose $g_n(x) = f_0(x) - f_n(x)$. Comme la suite $(f_n : n \in \mathbb{N})$ est décroissante, g_n est une fonction positive, et la suite $(g_n : n \in \mathbb{N})$ est croissante. Puisque f_0 et f_n sont mesurables, g_n l'est aussi, ainsi que

$$f = \lim_n f_n = \inf_n f_n \qquad \text{et} \qquad g = \lim_n g_n = \sup_n g_n.$$

D'après le théorème de convergence monotone, $\int g = \lim_n \int g_n$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int f_0 - \int f = \int (f_0 - f) = \int (f_0 - \lim_n f_n) = \int \lim_n (f_0 - f_n) = \int \lim_n g_n = \int g \\ = \lim_n \int g_n = \lim_n \int (f_0 - f_n) = \lim_n (\int f_0 - \int f_n) = \int f_0 - \lim_n \int f_n.\end{aligned}$$

Or, $0 \leq f, f_n \leq f_0$ implique $0 \leq \int f, \lim_n \int f_n \leq \int f_0 < \infty$. On en déduit

$$\int f = \int \lim_n f_n = \lim_n \int f_n.$$

Question 4. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to [0, \infty]$ qui converge uniformément vers 0 sur X. On suppose $\mu(X) < \infty$. Démontrer que

$$\lim_n \int f_n = 0.$$

Solution. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $f_n \to 0$ uniformément sur X il y a $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq f(x) \leq \frac{\epsilon}{\mu(X)}$ pour tout $x \in X$ et $n \geq N$. Alors pour $n \geq N$ on a

$$\int f_n \leq \int \frac{\epsilon}{\mu(X)} = \frac{\epsilon}{\mu(X)} \mu(X) = \epsilon.$$

Ainsi $\lim_n \int f_n = 0$.