Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

PARTIEL

3 novembre 2014 — durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question 1. Soit $X = \mathbb{N}$. Pour tout $L > 0$ on note

$$\mu_L : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \qquad \mu_L(A) = \sum_{k \in A} L^k \text{ pour } A \subseteq X.$$

1. Prouver que μ_L est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$ pour tout $L > 0$.
2. Pour quels $L > 0$ la mesure μ_L est-elle finie ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $A_n = X \cap [n, \infty[$. Calculer $\mu_L(A_n)$ et $\mu_L(\mathbb{N} \setminus A_n)$ pour tous $L > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $(L_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de réels strictement positifs, avec limite $L < \infty$. Soit $(A_n : n \in \mathbb{N})$ une suite croissante de parties de X et $A = \bigcup_n A_n$. Prouver que $\lim_n \mu_{L_n}(A_n) = \mu_L(A)$.

Question 2. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de sous-ensembles de X contenus dans $\mathcal{T}$.

1. Prouver que $\bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\mu(\bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$
2. Si $B_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$ et $b_n = \inf_{k \geq n} \mu(A_k)$, prouver que $B_n \subseteq B_{n+1}$ et $b_n \leq b_{n+1}$.
3. En déduire que
$$\mu(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$
4. Si on définit $\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, en déduire le Lemme de Fatou pour les suites d'ensembles :
$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

Question 3. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite décroissante de fonctions mesurables $f_n : X \to [0, \infty]$. On suppose $\int f_0 \neq \infty$. Démontrer que

$$\lim_n \int f_n = \int (\lim_n f_n).$$

Question 4. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to [0, \infty]$ qui converge uniformément vers 0 sur X. On suppose $\mu(X) < \infty$. Démontrer que

$$\lim_n \int f_n = 0.$$