PARTIEL Mesure et Intégration

22 octobre 2013 — durée 2 h

Question 1. Soient X un espace topologique et Y un sous-ensemble borélien de X, avec la topologie induite. Montrer que les sous-ensembles boréliens de Y sont les sous-ensembles boréliens de X contenus dans Y.

Solution. Soient $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne sur X, et $\mathcal{B}(Y)$ celle sur Y. Notons d'abord que puisque $Y \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$\{U \in \mathcal{B}(X) : U \subseteq Y\} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}(X)\} = i^{-1}(\mathcal{B}(X)),$$

où $i : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion.

Comme Y porte la topologie induite, i est continue. D'après un théorème du cours, une fonction continue est mesurable, et donc $i^{-1}(\mathcal{B}(X)) \subseteq \mathcal{B}(Y)$.

Réciproquement, si O est ouvert dans Y, alors il existe un ouvert O' dans X avec $O = O' \cap Y = i^{-1}(O')$. Donc $i^{-1}(\mathcal{B}(X)$ est une tribu qui contient les ouverts de Y. Ainsi $\mathcal{B}(Y) \subseteq i^{-1}(\mathcal{B}(X))$ et on a égalité. $\square$

Question 2. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive *bornée*. Montrer que f est limite *uniforme* sur X d'une suite croissante de fonctions mesurables étagées positives.

Solution. Pour un entier $k > 0$ on pose $g_k(x) = [2^k f(x)]/2^k$, où $[.]$ est la partie entière. Si $|f|$ est bornée par N, alors g_k prend au plus $2^k(N+1)$ valeurs, elle est donc étagée. On a $g_k^{-1}(]-\infty, a]) = f_k^{-1}([-\infty, [2^k a]/2^k])$; comme f est mesurable, g_k l'est aussi. Enfin, $g_k(x)$ est le plus grand multiple de 2^{-k} inférieur ou égal a $f(x)$. La suite des g_k est donc croissante, et $|f(x) - g_k(x)| < 2^{-k}$. Ainsi $g_k \to f$ uniformément. $\square$

Question 3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Démontrer que l'ensemble des points $x \in X$ tels que la suite $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ ait une limite est un ensemble mesurable.
[Indication : Une suite $(f_n(x))_n$ converge si et seulement si $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$.]

Solution. D'après le cours, comme tous les f_n sont mesurables, $\liminf_n f_n(x)$ et $\limsup_n f_n(x)$ le sont aussi. La fonction $(x, y) \mapsto x - y$, où l'on pose (exceptionnellement !) $\infty - \infty = (-\infty) - (-\infty) = 0$, est continue de $\bar{R}^2$ dans $\bar{R}$. Alors la fonction $g(x) = \liminf_n f_n(x) - \limsup_n f_n(x)$ est mesurable. Or,

$$\{x \in X : (f_n)_n \text{ a une limite}\} = \{x \in X : g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\}).$$

Comme $\{0\}$ est borélien (même fermé), c'est un ensemble mesurable. $\square$

Question 4.

1. Soit X un espace topologique σ-compact.
   (a) Montrer que la tribu borélienne sur X est engendrée par les sous-ensembles compacts.
   (b) En déduire que si $f : X \to Y$ est continue et injective, alors la tribu image réciproque de la tribu borélienne sur Y est la tribu borélienne sur X.

2. Soient $X =]0,\infty[\times[0,2\pi[$, $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f : X \to Y$ l'application définie par $f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{B}(Y))$ de la tribu borélienne de Y.

Solution.

1. (a) X est σ-compact ; il existe donc une suite croissante $(X_n : n \in \mathbb{N})$ de sous-ensembles compacts avec $X = \bigcup_n X_n$. Or, la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ est engendré par les ouverts, donc par les fermés. Si F est un fermé, alors $F \cap X_n$ est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc dans $\mathcal{B}(X)$. Or,
$$\bigcup_n (F \cap X_n) = F \cap \bigcup_n X_n = F \cap X = F.$$
Ainsi les compacts engendrent $\mathcal{B}(X)$.
   (b) Comme f est continue, l'image réciproque d'un ouvert de Y est un ouvert de X. Donc $f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Réciproquement, soit C un compact de X. Par injectivité, $C = f^{-1}(f(C))$. Il suffit donc de montrer que $f(C)$ est compact dans Y. Or, l'image d'un compact par une fonction continue est compact : si $(O_i : i \in I)$ est une famille d'ouverts dans Y avec $f(C) \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, alors $(f^{-1}(O_i) : i \in I)$ est une famille d'ouverts de X et $C \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$. Par compacité il y a une sous-famille finie $I_0 \subseteq I$ avec $C \subseteq \bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(O_i)$. Alors $f(C) \subseteq \bigcup_{i\in I_0} O_i$, et $f(C)$ est bien compact.
2. L'application f est bijective, donc injective, et continue (le sin, cos et la multiplication le sont). De plus, X est σ-compact, comme
$$X = \bigcup_{n>0} [\frac{1}{n}, n] \times [0, 2\pi - \frac{1}{n}].$$
Donc $f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) = \mathcal{B}(X)$, la tribu borélienne sur X. □

Question 5. Soit $0 < \alpha < 1$. On pose $E_0 = [0,1]$, et étant donné E_n composé de 2^n intervalles disjoints fermés de longueur ℓ_n, on construit E_{n+1} en enlevant de chacun de ces intervalles le segment ouvert au milieu de longueur $\alpha/3^{n+1}$. On pose $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

1. Calculer ℓ_n et la mesure de Lebesgue $\lambda(E_n)$ en fonction de n.
2. Montrer que E est borélien, et calculer $\lambda(E)$.
3. Si I est un intervalle ouvert de longueur $\epsilon > 0$, montrer que I n'est pas contenu dans E_n pour n suffisamment grand. En déduire que E est d'intérieur vide.

Solution.

1. On a $\ell_0 = 1$, et $\ell_{n+1} = \frac{1}{2}(\ell_n - \alpha\, 3^{-(n+1)})$. Ainsi $2^{n+1}\ell_{n+1} = 2^n\ell_n - \frac{\alpha}{2}\,(\frac{2}{3})^{n+1}$; donc
$$\ell_n = 2^{-n}(1 - \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{3})^i), \text{ et } \lambda(E_n) = 2^n\ell_n = 1 - \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{3})^i.$$
2. $E = \bigcap_n E_n$; comme tous les E_n sont fermés, E est borélien. On a
$$\lambda(E) = \lambda(\bigcap_n E_n) = \lim_n \lambda(E_n) = 1 - \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^i = 1 - \frac{\alpha}{2}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1 - \alpha > 0.$$
3. On a
$$\lim_n \ell_n = \lim_n 2^{-n}\lambda(E_n) = \lim_n 2^{-n}\lambda(E) = \frac{1-\alpha}{2^n} = 0.$$
Donc $\epsilon > \ell_n$ pour n suffisamment grand ; comme les composantes connexes de E_n sont des segments de longueur ℓ_n, il est impossible que I soit contenu dans E_n. Ainsi E ne peut contenir aucun interval ouvert non-vide : E est d'intérieur vide. □