Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Mesure et Intégration

PARTIEL

22 octobre 2013 — durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question 1. Soient X un espace topologique et Y un sous-ensemble borélien de X, avec la topologie induite. Montrer que les sous-ensembles boréliens de Y sont les sous-ensembles boréliens de X contenus dans Y.

Question 2. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive *bornée*. Montrer que f est limite *uniforme* sur X d'une suite croissante de fonctions mesurables étagées positives.

Question 3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Démontrer que l'ensemble des points $x \in X$ tels que la suite $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ ait une limite est un ensemble mesurable.
[Indication : Une suite $(f_n(x))_n$ converge si et seulement si $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$.]

Question 4.

1. Soit X un espace topologique σ-compact.
   (a) Montrer que la tribu borélienne sur X est engendrée par les sous-ensembles compacts.
   (b) En déduire que si $f : X \to Y$ est continue et injective, alors la tribu image réciproque de la tribu borélienne sur Y est la tribu borélienne sur X.
2. Soient $X =]0, \infty[\times [0, 2\pi[$, $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f : X \to Y$ l'application définie par $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{B}(Y))$ de la tribu borélienne de Y.

Question 5. Soit $0 < \alpha < 1$. On pose $E_0 = [0, 1]$, et étant donné E_n composé de 2^n intervalles disjoints fermés de longueur ℓ_n, on construit E_{n+1} en enlevant de chacun de ces intervalles le segment ouvert au milieu de longueur $\alpha/3^{n+1}$. On pose $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

1. Calculer ℓ_n et la mesure de Lebesgue $\lambda(E_n)$ en fonction de n.
2. Montrer que E est borélien, et calculer $\lambda(E)$.
3. Si I est un intervalle ouvert de longueur $\epsilon > 0$, montrer que I n'est pas contenu dans E_n pour n suffisamment grand. En déduire que E est d'intérieur vide.